Teorie her

LS 2020/21, FJFI ČVUT

1. domací úlohy

---

1) Popište vyhrávající strategii prvního hráčě ve hře $3 \times 3 \times 3$ piškvorky.

   Připomeňme, že popis vyhrávající strategie musí 1. hráči vybrat odpověď na libovolný tah protihráče.

2a) Dokažte, že libovolné r-obarvení $\{1,2\}^r$ obsahuje monochromatickou kombinatorickou přímku.

   Všimněte si, že důkaz Hales-Jewettovy věty z přednášky garantuje monochromatickou kombinatorickou přímku v obarveních $\{1,2\}^d$ *pouze za předpokladu* $d > r^2 + r^{2^{r^2}}$.

2b) Pro každé přirozené číslo $r \geq 2$ zkonstruujte r-obarvení $\{1,2\}^{r-1}$ takové, že neobsahuje žádnou monochromatickou kombinatorickou přímku.

3) Dokažte "vícerozměrnou analogii" Hales-Jewettovy věty: pro každé $\ell, r, d \in \mathbb{N}$ existuje přirozené číslo $D := D(\ell, r, d)$ takové, že libovolné r-obravení $\{1,2,\ldots,\ell\}^D$ obsahuje monochromatickou d-krychli. Jinými slovy, pro každé $\chi : \{1,2,\ldots,\ell\}^D \to \{1,\ldots,r\}$ existuje vzor $\tau := \tau(\chi)$ délky D obsahující d různých druhů hvězdiček $\star_1, \star_2, \ldots, \star_d$ (každou alespň jednou) takový, že

$$\chi(b) = \chi(b') \quad \forall b, b' \in \Big\{ \tau(x_1,\ldots,x_d) \,\Big|\, x_1,\ldots,x_d \in \{1,2,\ldots,\ell\} \Big\},$$

   kde $\tau(x_1,\ldots,x_d)$ značí bod v $\{1,2,\ldots,\ell\}^D$ získaný z τ substitucí $\star_i \to x_i$ pro každé $i \in \{1,\ldots,d\}$.

   Hint: Převeďte problém na nalezení monochromatické kombinatorické přímky v r*-obarvení krychle*

$$\{1,2,\ldots \ell \times d\}^{D/d}.$$