Teorie her

LS 2020/21, FJFI ČVUT

2. domací úlohy

1) Dva hráči sedí u odélníkového stolu s rozměry $a \times b$ cm, mají každý pytel s 1kč mincemi (připomeňme, že 1kč mince má poloměr roven 1cm), a hrají s nimi následující hru:

   - Hráči se střidají po tazích a hru začíná první hráč,
   - v každém tahu příslušný hráč položí na stůl jednu novou minci,
   - položená mince musí ležet na stole celou svou kruhovou plochou,
   - s již položenou mincí už není možno nikterak hýbat,
   - mince se mohou navzájem dotýkat, avšak nesmějí se vrstvit (tj. pokládat na sebe),
   - hráč, který ve svém tahu už nemůže položit na stůl novou minci, prohrál.

   V závislosti na rozměrech stolu určete, který z hráčů má vyhrávající strategii.

2) Dokažte, že proces iterované eliminace **striktně dominovaných** strategií má vždy jednoznačný výsledek, neboli pro každé dvě maximální posloupnosti postupného eliminování striktně dominovaných strategií je výsledná zredukovaná hra stejná.

3) Dokažte, že předchozí úloha nelze zobecnit vypuštěním slova "striktní", tj. existují hra a pro ní dvě maximální posloupnosti postupného eliminování dominovaných strategií takové, že výsledné zredukované hry jsou různé.

$\star$) Dokažte "vícerozměrnou analogii" Hales-Jewettovy věty: pro každé $\ell, r, d \in \mathbb{N}$ existuje přirozené číslo $D := D(\ell, r, d)$ takové, že libovolné r-obravení $\{1, 2, \ldots, \ell\}^D$ obsahuje monochromatickou d-krychli. Jinými slovy, pro každé $\chi : \{1, 2, \ldots, \ell\}^D \to \{1, \ldots, r\}$ existuje vzor $\tau := \tau(\chi)$ délky D obsahující d různých druhů hvězdiček $\star_1, \star_2, \ldots, \star_d$ (každou alespň jednou) takový, že

$$\chi(b) = \chi(b') \quad \forall b, b' \in \left\{ \tau(x_1, \ldots, x_d) \,\middle|\, x_1, \ldots, x_d \in \{1, 2, \ldots, \ell\} \right\},$$

kde $\tau(x_1, \ldots, x_d)$ značí bod v $\{1, 2, \ldots, \ell\}^D$ získaný z τ substitucí $\star_i \to x_i$ pro každé $i \in \{1, \ldots, d\}$. Za řešení pouze pro $d = 2$ je 1/2 bodu.

Hint: Převeďte problém na nalezení monochromatické kombinatorické přímky v r-obarvení krychle

$$\{1, 2, \ldots \ell^d\}^{D/d}.$$