Teorie her

LS 2020/21, FJFI ČVUT

3. domací úlohy

---

1) Nechť $G = (S_1, S_2, u)$ je hra dvou hráčů s nulovým součtem a hodnotou v. Dokažte, že pokud $\mathscr{S} = (s_I, s_{II}) \in S_1 \times S_2$ je equilibirum G, tak poté $u(\mathscr{S}) = v$.

2) Zkonstruujte hru (S_1, S_2, u) dvou hráčů s nulovým součtem, kde S_1 i S_2 jsou obě nekonečné, tak, aby hra neměla hodnotu vzhledem k mixovaným strategiím.

   Hint: uvažte následující hru – oba hráči (tajně) napíší nějaké přirozené číslo a pak je najednou zveřejní. Ten, kdo napsal menší číslo, zaplatí protihráči \$1 *(v případě remízy neplatí nikdo nic).*

3) Dokažte, že funkce f z důkazu Nashovy věty je funkce zobrazující do $\sum$, neboli $f\left(\sum\right) \subseteq \sum$.

   Připomeňme, že $G = (N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ je strategická hra s konečnými množinami N a $S_1, S_2, \ldots, S_N$, a užitkovými funkcemi $u_1, u_2, \ldots, u_N$. Pro každého hráče $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$, označme

$$S_i = \left\{s_i^1, s_i^2, \ldots, s_i^{m_i}\right\} \quad \text{kde} \quad m_i := |S_i|\,.$$

   Poté nechť $\sum_i$ je množinou všech pravděpodobnostních distribucí na S_i (tj. $(m_i - 1)$-simplex v $\mathbb{R}^{m_i}$),

$$\sum := \prod_{i=1}^{N} \sum\nolimits_i \quad \text{a konečně} \quad U_i(\sigma) := \mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\sigma} u_i(s) \quad \text{pro všechna} \quad \sigma \in \sum.$$

   Strategické hře $\Gamma = (N, (\Sigma_i)_{i\in N}, (U_i)_{i\in N})$ říkáme mixované rozšíření hry G.

   Pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ a $j \in \{1, 2, \ldots, m_i\}$ definujme funkce $g_i^j : \Sigma \to \mathbb{R}$ a $f_i^j : \Sigma \to [0, 1]$ jako

$$g_i^j(\sigma) := \max\left\{0,\, U_i\left(\sigma_{-i}, s_i^j\right) - U_i(\sigma)\right\} \quad \text{a} \quad f_i^j(\sigma) := \frac{\sigma_i\left(s_i^j\right) + g_i^j(\sigma)}{1 + \sum\limits_{k=1}^{m_i} g_i^k(\sigma)} \quad \text{pro všechna} \;\; \sigma \in \sum\,.$$

   Označme $D := \sum_{i=1}^{N} m_i$, a konečně definujme kýženou funkci $f : \sum \to \mathbb{R}^D$ po složkách

$$(f(\sigma))_{i,j} := f_i^j(\sigma) \quad \text{kde } i \in \{1, 2, \ldots, N\},\; j \in \{1, 2, \ldots, m_i\} \;\text{ a }\; \sigma \in \sum\,.$$