Hry s nulovým součtem & hry s úplnou informací

Def: Hra 2 hráčů má nulový součet pokud

$\underbrace{\forall \text{ výsledek } \sigma}$ $\quad u_I(\sigma) = -u_{II}(\sigma)$

rozšířená forma: listy herního stromu
strategická forma: $\forall s_1 \in S_1, \forall s_2 \in S_2$

$\boxed{\text{stabilita}}$ X $\boxed{\text{bezpečnost}}$

Hra s nulovým součtem – tyto koncepty splývají

Př:

	L	C	$\boxed{R}$ (II.)	
T	3, -3	-5, 5	-2, 2	-5
$\boxed{M}$ (I.)	1, -1	4, -4	1, -1	+1
B	6, -6	-3, 3	-5, 5	-5
	-6	-4	-1	

$\sum = 0$

Konvence:
Pro hry s $\sum = 0$ budeme uvádět jen zisk I.

$\longleftrightarrow$ max min I. hráče $\max_{s_1} \min_{s_2} u(s_1, s_2)$

Př:

	H	T
H	+1	-1
T	-1	+1

II. $\max_{s_2} \min_{s_1} -u(s_1, s_2)$

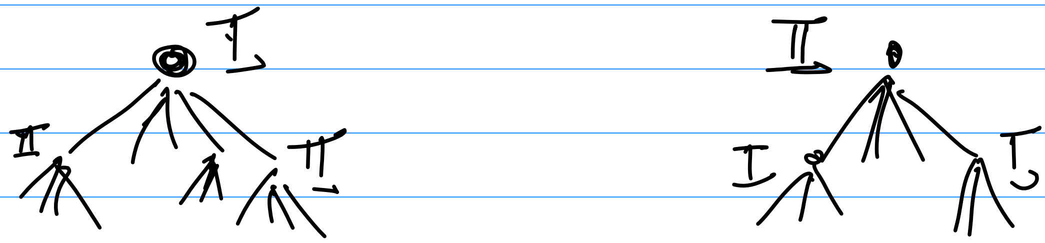
$- \min_{s_2} \max_{s_1} u(s_1, s_2)$

Def: $\underline{v} := \max_{s_1} \min_{s_2} u(s_1, s_2)$

$\overline{v} := \min_{s_2} \max_{s_1} u(s_1, s_2)$

Věta (von Neumann): Každou konečnou hru v rozšířené formě dvou hráčů s $\Sigma = 0$ platí

$$\underline{v} = \overline{v}.$$



Def: Pokud $\underline{v} = \overline{v}$, tak řekneme, že v je hodnota té hry (minimax hodnota)

Věta: Pokud má hra dva hráčů s $\Sigma = 0$ hodnotu v.

1) $\underline{s}_I \in S_1$ a $\underline{s}_{II} \in S_2$ jsou strategie že $u(\underline{s}_I, \underline{s}_{II}) = v$ tak $(\underline{s}_I, \underline{s}_{II})$ je ekvilibrium.

2) Pokud $(\underline{s}_I, \underline{s}_{II})$ je ekvilibrium tak $u(\underline{s}_I, \underline{s}_{II}) = v$.

Dk (1): mějme s_I, s_{II} a víme že $u(s_I, s) \geq v$ $\forall s \in S_2$

a zároveň $-u(t, s_{II}) \geq -v$ $\forall t \in S_1$

$u(t, s_{II}) \leq v$

kde $v = u(s_1, s_2)$

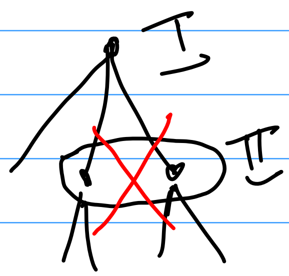
množiny strategií

Tudíž víme, že $\underbrace{u(s_I, s) \geq u(s_I, s_{II}) \quad \forall s \in S_2}_{\text{II. hráč si lokálně nepomůže}}$

a dále $\underbrace{u(t, s_{II}) \leq u(s_I, s_{II})}_{\text{I. hráč si lokálně nepomůže}}$ $\forall t \in S_1$

$\Rightarrow$ (s_I, s_{II}) je ekvilibrium.

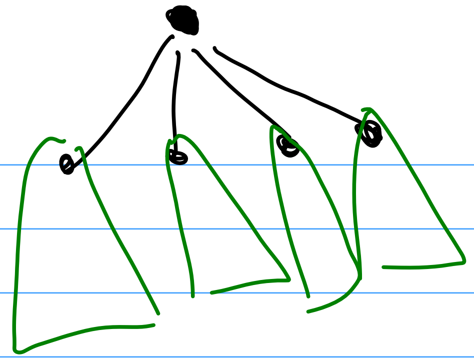
Hry s úplnou informací



Nestane se

Věta (Kuhn): Každá hra s úplnou informací má ≥ 1 ekvilibrium.

Idea:

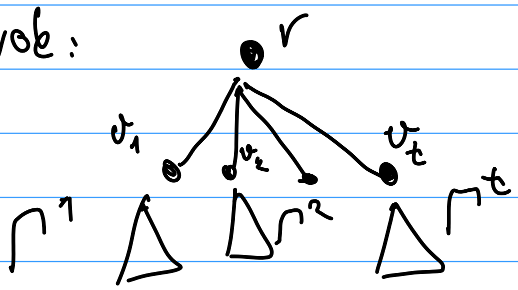


Konvence: pokud v nějaké (pod)hře nějaký hráč i "nic nerozhoduje" $\Leftrightarrow V_i = \emptyset$ tak jeho jediná strategie je prázdná strategie

Dk (indukcí dle velikosti herního stromu):

strom = • jediný profil $(\emptyset_1, \dots, \emptyset)$

Indukční krok:



Indukce $\Rightarrow$ $\forall j \quad s^j := (s_1^j, \dots, s_n^j)$ ekvilibrium Γ^j

$$
\begin{array}{cccc}
v_1 & v_j & & v_t \\
s_1^1 & \cdots & \cdots & s_n^1 \\
s_1^2 & \cdots & \cdots & s_n^2 \\
s_1^t & \cdots & \cdots & s_n^t
\end{array}
$$

Případ 1: r je typu hráč nula (náhoda) $\equiv r \in V_0$

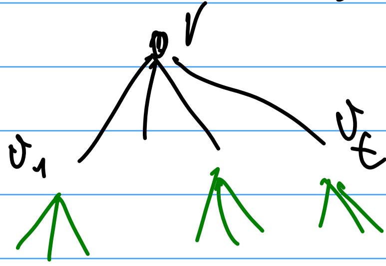
Strategie s_i^* hráče i $\forall i$ je následující:

pokud je zvolen vrchol v_j, tak postupuj dle strategie s_i^j ; $s^* := (s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*)$

$$u_i(s^*) = \sum p_j \cdot u_i^{\Gamma^j}(s^j)$$

kde $(p_1, \dots, p_t)$ je pravděpodobnostní distribuce

Tvrdíme, že s^* je ekvilibrium Γ. Uvažme libovolnou strategii t_i hráče i. Def strategie t_i^j $\forall j \in \{1, \dots, t\}$



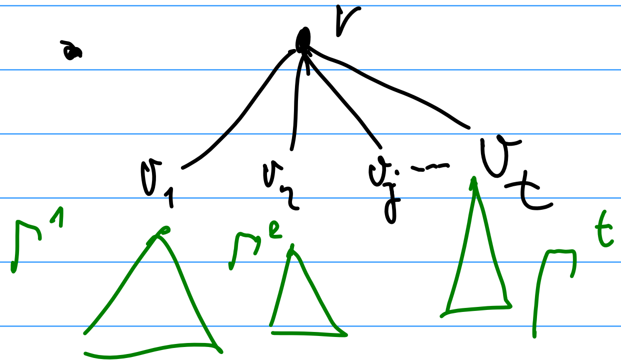
podle toho, jak strategie t_i postupuje při uzlem v_j.

$\forall j$: t_i^j strategie v Γ^j, protože (s^j) je ekvilibrium, tak

$$u_i(s^j_{-i}, t_i^j) \le u_i(s^j) \longleftarrow \text{Ekvilibrium } \Gamma^j$$

$$u_i(s^*_{-i}, t_i) = \sum_{j=1}^{t} p_j \boxed{u_i^{\Gamma^j}(s^j_{-i}, t_i^j)} \le \underbrace{\sum p_j u_i^{\Gamma^j}(s^j)}_{= u_i(s^*)}$$

Případ 2: $r \in V_1$.



Z indukce $(s_1^j, \dots, s_n^j) = s^j$ buď ekvilibrium Γ^j

Pro hráče $i \geq 2$, $s_i^* :=$ $\underline{\text{analogicky jako v předchozím}}$

Hráč číslo 1:

$$\max_{j \in \{1, \dots, t\}} u_1^{\Gamma^j}(s^j) \overset{\text{BÚNO}}{=} u_1^{\Gamma^1}(s^1)$$

$s_1^* :=$ ve vrcholu v zvol syna v_1, a poté hraj dle s_1^1

$$s^* := (s_1^*, \dots, s_n^*)$$

Ekvilibrium: pro $i \geq 2$, analogicky jako v předchozím případě

Hráč 1: $t_1 \in S_1$ v r strategie t_1 vybere nějaké v_j

t_1^j je strategie v Γ^j

$$u_1^{\Gamma^j}(s_{-1}^j, t_1^j) \underset{\text{INDUKCE}}{\leq} u_1^{\Gamma^j}(s^j) \underset{\text{z max}}{\leq} u_1(s^*)$$

$\rightsquigarrow$ s^* je ekvilibrium Γ

$\boxed{\text{QED}}$