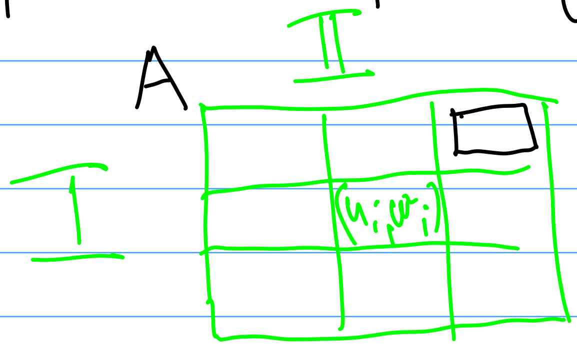
Kooperační hry – 2 hráči

Myšlenka: před samotnou hrou se hráči mohou domluvit na svých strategiích

Předpoklad: hráči pak hrají, jak se domluvili



u – zisk 1.

w – zisk 2.

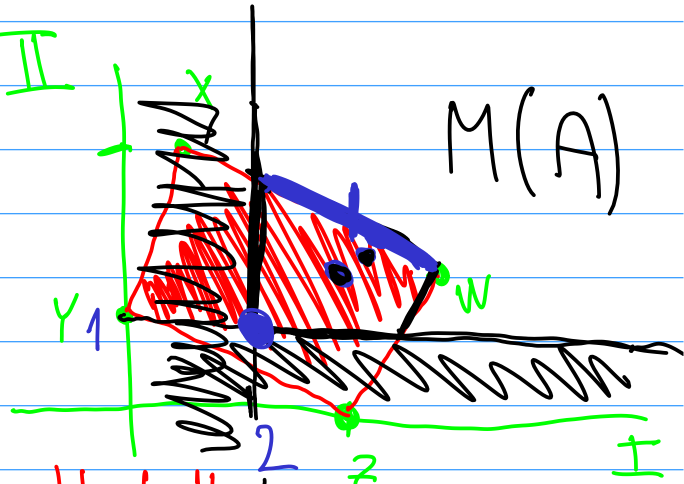
Předpoklad: pravidla hry (množiny strategií & zisky) jsou známé

Dohoda ≡ pravděpodobnostní distribuce na buňkách

$A \longleftrightarrow P(S_1), P(S_2)$

Př:

p	$4,2$ (w)	$1,4$ (x)
$1-p$	$0,1$ (y)	$3,0$ (z)



Možné distribuce A:

zisky ⟷ bod z n-úhelníku uvnitř konvex obalu všech buněk A

I. hráč $S_1 = (p, 1-p)$

II.

$4p$	$3-2p$

$4p = 3-2p \rightsquigarrow p = 1/2 \rightsquigarrow$ zisk: 2

II.

	q	$1-q$
	$4,2^{w}$	$1,4^{x}$
	$0,1^{y}$	$3,0^{z}$

$q = 1$

I.

4	$-2q$
q	

$q = 4 - 2q$

$q = 4/3 > 1$

Hodnota, kterou si 1. hráč vždy může zajistit je hodnota hry s $\Sigma = 0$ podle u_I

analogicky pro 2. hráče (prohodí se $I \leftrightarrow II$ a u_{II})

„security level"

Def: (s_x, s_y) je status-quo pro hru s maticí A

$s_x := \text{hodnota } [\Sigma = 0]_I$ $\qquad s_y := \text{hodnota } [\Sigma = 0]_{II}$

Def: Dohadovací množina: $D(A) = \left\{ \begin{array}{l} (x,y) \in M(A) : x \geq s_x \;\&\; y \geq s_y \\ (x,y) \leq (x',y') \Rightarrow x = x',\ y = y' \end{array} \right.$

$x \leq x'$ & $y \leq y'$

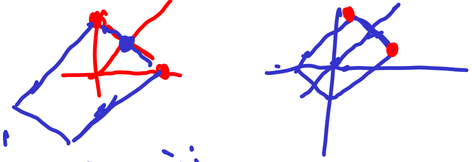
Def: Nashovo pravidlo: $\max_{(x,y) \in D(A)} (x - s_x) \cdot (y - s_y)$

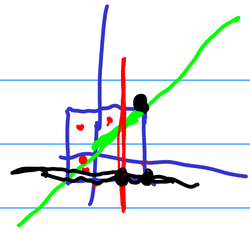
$\alpha(x - s_x)$

číst ①: $\alpha x + \beta$ $\qquad s_x \to \alpha s_x + \beta$

Věta (Nash): Nashovo pravidlo je jediné splňující NA

Nashovy Axiomy:



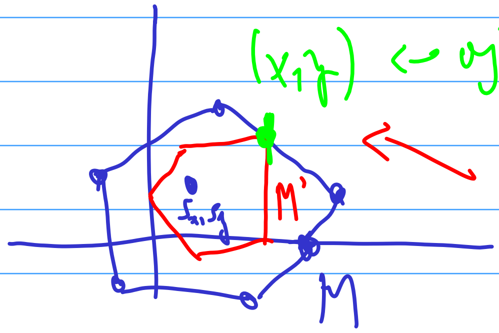


(1) výsledek je z Dohadovací množiny

(2) invariantní "lineární transformace"

(3) symetrie – když $M(A)$ je symetrický dle $x=y$ osy
tak výsledek je na ose $x=y$

(4) Když (x,y) je řešení pro M se status-quo (s_x,s_y)
M' se status quo (s_x,s_y): $\{(x,y)\} \subseteq M' \subseteq M \longrightarrow$ výsledek (x,y) pro M', s_x, s_y



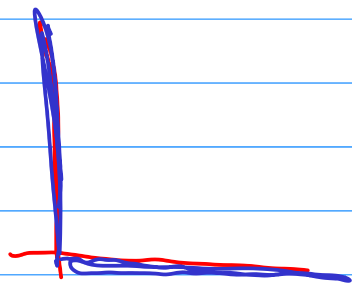
Dk (věta): Mějme pravidlo splňující (1)–(4)

BÚNO $(s_x,s_y)=(0,0)$ protože (II)

Kdyby $M(A) \subseteq \{(x,0)\ x \in \mathbb{R}^+\}$ $\rightsquigarrow$ Dohadovací velikost je jednoz.
$M(A) \subseteq \{(0,y)\ y \in \mathbb{R}^+\}$

$\Downarrow$

Dohadovací $m = \sup x$



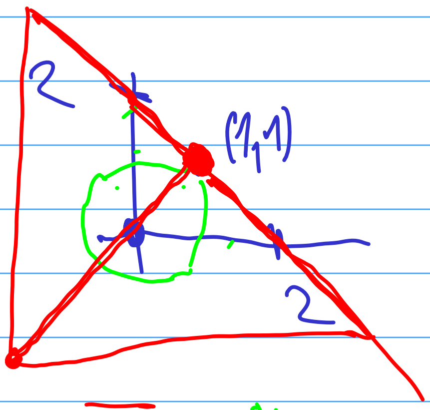
resp.

$\sup y$

Konvexita ⇝ $\exists (x,y) : x>0 \ \& \ y>0$

$\underline{(x^*, y^*)} := \text{bod} \ \max\limits_{(x,y)\in M} x\cdot y$

z (II) přeškálujme $\frac{x}{y}$ hodnotou $\frac{x^*}{y^*}$



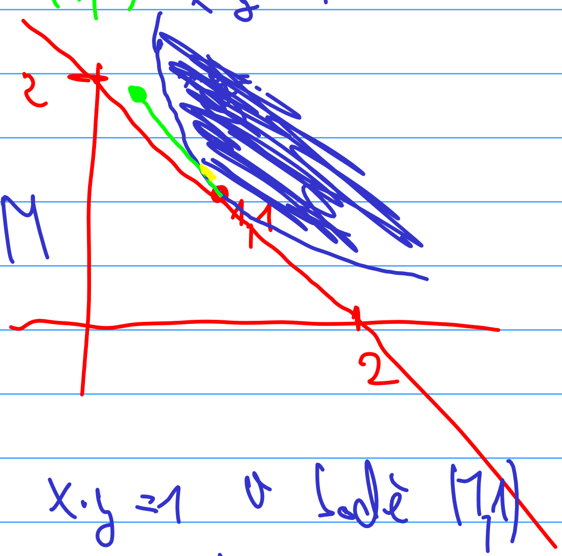
$\boxed{\forall (x,y)\in M : x+y \le 2}$

$T \supseteq M$

Symetrický trojúhelník

z (III) v T ⇝ výsledek (1,1)

z (IV) v A ⇝ výsledek (1,1)

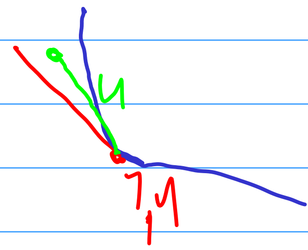


Dk: Ať $\exists (x_0,y_0)\in M : x_0+y_0>2$

Jenže
$\{(x,y) : x\cdot y>1\}$ je disj. s M
díky volbě x^* a y^*

$x+y=2$ je tečnou $x\cdot y=1$ v bodě (1,1)

úsečka U spojující $\underline{(x_0,y_0)}$ a $(1,1)$
protne $\{x\cdot y>1\}$ ($(x_0,y_0) \in M$, $(1,1)\in M$)



M je konvexní ⇝ $U \subseteq M$ ↯