Kooperační hry - n hráčů

(A,B,C)

C

	B	
A	4 2,-1,3	0 1,1,-2
	5 0,3,2	3 2,0,1

	B	
4 1,4,-1	5 3,1,1	A
0 -1,1,0	3 1,1,1	

$\boxed{f(A,B,C) = 5}$

Kooperace nějakých množin hráčů ~ koalice

Zisk koalice je Σ zisků jejích členů

V rámci koalice - lze přerozdělit zisk

Př: A a B spolupracují

(AB, C)

	C	
AB	1,3	5,-1
	2,-2	4,1
	3,2	0,0
	2,1	2,1

„security level" pro hráče C

H_C hra s $\Sigma = 0$ zisky / ztráty C jsou utilitní f

max hodnota $H_C =: f(\{C\})$

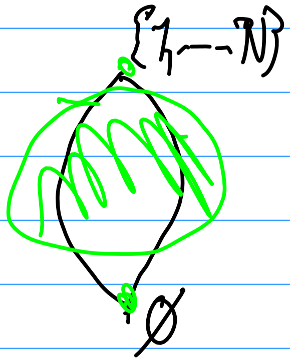
$f(\{A\}),\ f(\{B\}),\ \boxed{f(\{A,B\})},\ f(\{B,C\}),\ f(\{A,C\})$

$S \subseteq \{1, \dots, N\}$ $\quad f(S) :=$ max hodnota pomocné hry 2 hráčů s $\Sigma = 0$ kde S hraje proti $\bar{S}$

profil P $u(P) = \sum_{i \in S} u_i(P)$

Def: $f(\emptyset) := 0$

$f(\{1,\dots N\}) = \max_{P\ \text{profil}} \sum_{i=1}^{N} u_i(P)$



Def: Koaliční hra

$f : 2^N \to \mathbb{R}$

Super-modulární

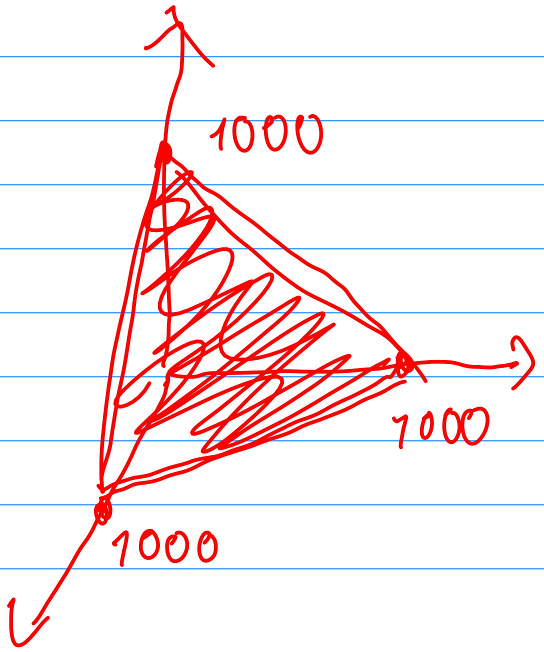
1) $f(\emptyset) = 0$
2) $f(S \cup T) \geq f(S) + f(T)$ $\forall$ S a T disj.

f je def. "security-level" hrami s $\sum = 0$

$S \times \bar{S}$

Př: 1000 kč, 3 hráči, rozdělit mezi sebou

1) $\boxed{\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}$
2) $(0, 1/2, 1/2)$
1) $\left(\frac{4}{10}, 6/10, 0\right)$
3) $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$



Shapleyho hodnota $\equiv_n$ "neutrální" výběr

Def: vektor zisků $(x_1 \dots x_n)$ je rozumný, pokud

① $f(\{1, \dots, n\}) = x_1 + x_2 \dots + x_n$

$\forall i \in \{1, \dots, n\}$ ② $x_i \geq f(\{i\})$

---

① Zafixujeme permutaci hráčů $\underline{\Pi}$

$$S_i^{(\pi)} := \{\pi(1), \dots \pi(i)\}$$

$$x_{\pi(i)}^{(\pi)} := f(S_{\pi(i)}^{(\pi)}) - f(S_{\pi(i)-1}^{(\pi)})$$

② $$\boxed{s_i := \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\pi \\ \text{permutace}}} x_i^{(\pi)}}$$

$(s_1 \dots s_n)$ Shapleyho hodnota

$$\sum s_i = f(\{1, \dots \dots n\})$$

$\forall \pi$ $$\sum_{i=1}^{n} x_i^{(\pi)} = f(\{1, \dots n\})$$

|| teleskop

$$f(\{1 \dots n\}) - f(\emptyset)$$

$$\forall i : s_i \geq f(\{i\})$$

$$\forall \pi \quad x^{(\pi)}_{\pi(i)} = \underbrace{f\left(S^{(\pi)}_{\pi(i)}\right)} - f\left(S^{(\pi)}_{\pi(i)-1}\right)$$

$$\geq f(\{i\})$$

$$f\left(S^{(\pi)}_{\pi(i)}\right) \geq f\left(S^{(\pi)}_{\pi(i)-1}\right) + f(\{i\}),$$

Shapleyho axiomy pro arbitráž koaličních her

① když hráč i $\quad f(S \cup \{i\}) = f(S)$

$\forall S \subseteq \{1 \dots n\}$

potom $x_i = 0$

② pokud $i, j : \forall S \subseteq \{1, \dots n\} \setminus \{i, j\}$

$$\underline{f(S \cup \{i\}) = f(S \cup \{j\})}$$

potom $x_i = x_j$

③ pokud $f = f_1 + f_2$ a arbitráž

pro $f_1 \longrightarrow (x_1, \dots\dots x_n)$

$f_2 \longrightarrow (y_1 \dots\dots y_n)$

potom $f \longrightarrow (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$

Věta (Shapley): Shapleyho hodnota je jediná arbitráž splňující (1) (2) (3)

$$\begin{tikzcd} \boxed{S_n} \arrow[r, "i \leftrightarrow j", "\text{bijekce}"'] & \boxed{S_n} \end{tikzcd}$$

② $\Rightarrow$ $s_i = s_j$

Dk (Věta):

$T \subseteq \{1, \dots, n\}$

Nejdříve uvažme

$$\boxed{h_{T,c}(S) = \begin{cases} \cancel{1}\, c & T \subseteq S \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}}$$

BÚNO $T = \{1, \dots, t\}$

$$x_1 = x_2 = \dots = x_t = \frac{\overset{c}{\cancel{1}}}{t} \qquad x_{t+1} = \dots = x_n = 0$$

② ①

Analogicky, pro $\forall c \geq 0$ arbitráž splňující ①, ②

na $h_{T,c}$ $\quad i \in T \quad x_i = c/t \qquad x_j = 0 \quad j \notin T$

Cíl: f koaliční funkce vyjádříme jako lin. kombinaci funkcí h_T

$$\forall S \qquad f(S) = \sum_{T \subseteq \{1, \dots, n\}} \underbrace{c_T}_{\gtrless 0} \cdot h_T(S) \qquad c_T = c_T^+ - c_T^-$$

$h(S)$

$$f(S) + \underbrace{\sum_{T \subseteq \{1, \dots, n\}} c_T^- h_T(S)}_{g(S)} = \underbrace{\sum_{T \subseteq \{1, \dots, n\}} c_T^+ h_T(S)}_{①②③ \rightsquigarrow \text{stejné jako Shapley}} \qquad \forall S$$

$$\boxed{f(S)} + \boxed{g(S)} = \boxed{h(S)} \qquad \forall S$$

$$\begin{tikzcd}
 & \arrow[d, "\text{Shapley}"] \arrow[r] & \text{Shapley} \\
\arrow[dd, "\text{arbitrary}"] & (y_1 \dots y_n) & (z_1 \dots z_n) \\
 & & (s_1 \dots s_n) \\
(x_1, \dots, \boxed{x_i}, \dots x_n) & & s_i + y_i = z_i \ \forall i \arrow[d] \\
 & & x_i = s_i \ \forall i
\end{tikzcd}$$

Axiom 3: $y_i + x_i = z_i \ \forall i$

$$f = \sum c_T \cdot h_T \qquad \forall i: c_{\{i\}} := f(\{i\})$$

$$f_0 := f \qquad f_1 := f_0 - \sum_{i=1}^{n} c_{\{i\}} h_{\{i\}}$$

$$f_0(S) = 0 \quad \forall |S| = 0 \qquad \forall S \ f_1(S) = f(S) - \sum_{i \in S} c_{\{i\}}$$

$$f_1(S) = 0 \quad \forall |S| \leq 1$$

$$\forall i \neq j: \ c_{\{i,j\}} := f_1(\{i,j\})$$

$$f_2 := f_1 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} c_{\{i,j\}} \cdot h_{\{i,j\}}$$

$$f_2(S) = 0 \quad \forall |S| \leq 2$$

⋮ celkem n-krát iterativně

$$f_n(S)=0 \quad \forall |S| \le n$$

$$f_0 = f$$

$$f_i = f_{i-1} - \sum \alpha_T h_T$$

$$0 = f_n$$

zpětným dosazením ---

$$f = \sum_{T \subseteq \{0, \dots, N\}} \beta_T h_T$$ pro nějaké β_T