Teorie her

LS 2020/21, FJFI ČVUT

1. domací úlohy

1a) Popište vyhrávající strategii prvního hráčě ve hře $3 \times 3 \times 3$ piškvorky.

Připomeňme, že popis vyhrávající strategie musí 1. hráči vybrat odpověď na libovolný tah protihráče.

1b) Zkonstruujte 2-obarvení $3 \times 3 \times 3$, které nemá žádnou monchromatickou kombinatorickou přímku.

2a) Dokažte, že libovolné r-obarvení $\{1,2\}^r$ obsahuje monochromatickou kombinatorickou přímku.

Všimněte si, že důkaz Hales-Jewettovy věty z přednášky garantuje monochromatickou kombinatorickou přímku v obarveních $\{1,2\}^d$ *pouze za předpokladu* $d \geq r^2 + r^{2^{r^2}}$.

2b) Pro každé přirozené číslo $r \geq 2$ zkonstruujte r-obarvení $\{1,2\}^{r-1}$ takové, že neobsahuje žádnou monochromatickou kombinatorickou přímku.

3) Dokažte "vícerozměrnou variantu" Hales-Jewettovy věty: pro každé $\ell, r, d \in \mathbb{N}$ existuje přirozené číslo $N := N(\ell, r, d)$ takové, že libovolné r-obravení $\{1,2,\dots,\ell\}^N$ obsahuje monochromatickou d-krychli. Jinými slovy, pro každé $\chi : \{1,2,\dots,\ell\}^N \to \{1,\dots,r\}$ existuje vzor $\widetilde{\alpha}$ délky N obsahující d různých druhů hvězdiček $\star_1, \star_2, \dots, \star_d$ (každou z nich alespoň jednou) takový, že

$$\chi(b) = \chi(b') \quad \forall b, b' \in \left\{ \widetilde{\alpha}(x_1,\dots,x_d) \,\middle|\, x_1,\dots,x_d \in \{1,2,\dots,\ell\} \right\},$$

kde $\widetilde{\alpha}(x_1,\dots,x_d)$ značí bod v $\{1,2,\dots,\ell\}^N$ získaný z α substitucí $\star_i \to x_i$ pro každé $i \in \{1,\dots,d\}$.

Hint: Převeďte problém na hledání monochromatické kombinatorické přímky v r-obarvení krychle

$$\left\{1, 2, \dots \ell^d\right\}^{N/d}.$$

$\star$) Dokažte tzv. van der Wardenovu větu: pro každé $r, k \in \mathbb{N}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové že libovolné r-obarvení $\chi : \{1,\dots,N\} \to \{1,\dots,r\}$ obsahuje monochromatickou *aritmetickou posloupnost* délky k. Jinými slovy, existují nějaké kladné $a, d \in \mathbb{N}$ takové, že

$$a + (k-1)d \leq N \quad \text{a} \quad \chi(a) = \chi(a+d) = \chi(a+2d) = \dots = \chi(a+(k-1)d).$$

$\star\star$) Dokažte tzv. Gallai-Wittovu větu : Nechť $r, t \in \mathbb{N}$ a $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ libovolná konečná množina bodů v $\mathbb{R}^t$ taková, že každá souřadnice každého bodu je přirozené číslo. Dokažte, že existuje $N \in \mathbb{N}$ takové že libovolné r-obarvení $\chi : \{1,\dots,N\}^t \to \{1,\dots,r\}$ obsahuje monochromatickou *homotetickou kopii* X, tj. existují nějaké kladné $a \in \{1,\dots,N\}^t$ a $d \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall i \in \{1,\dots,m\} : a + d \cdot x_i \in \{1,\dots,N\}^t \quad \text{a} \quad \chi(a + d \cdot x_1) = \chi(a + d \cdot x_2) = \dots = \chi(a + d \cdot x_m).$$

Poznámka: pro $t = 1$ a $X = \{(0), (1), \dots, (k-1)\}$ homotetické kopie X přesně odpovídají aritmetickým posloupnostem délky k, a tak se Gallai-Wittova věta často chápe jako vícerozměrné zobecnění van der Wardenovy věty.