Teorie her

LS 2021/22, FJFI ČVUT

2. domací úlohy

1) Dva hráči sedí u prázdného odélníkového stolu s rozměry $a \times b$ cm, mají každý pytel s 1kč mincemi (připomeňme, že 1kč mince má poloměr roven 1cm), a hrají s nimi následující hru:

   - Hráči se střidají po tazích a hru začíná první hráč,
   - v každém tahu příslušný hráč položí na stůl jednu novou minci,
   - položená mince musí ležet na stole celou svou kruhovou plochou,
   - s již položenou mincí už není možno jakkoliv hýbat,
   - mince se mohou navzájem dotýkat, avšak nesmějí se vrstvit (tj. pokládat na sebe),
   - hráč, který ve svém tahu už nemůže položit na stůl novou minci, prohrál.

   V závislosti na rozměrech stolu určete, který z hráčů má vyhrávající strategii.

---

2) Pro konečnou množinu S kladných celých čisel definujme S-dřívkovou nestrannou normální hru následovně:

   - na začátku je na hrací ploše přesně n dřívek,
   - hráči se střidají po tazích a hru začíná první hráč,
   - ve svém tahu si hráč vybere nějaké $s \in S$ a odebere z hrací plochy přesně s dřívek,
   - prohrává hráč, který nemůže táhnout (tj. má před sebou méně dřívek než $\min_{s \in S} s$).

a) Buď α_n^k $\{1, 2, \ldots, k\}$-dřívková hra s n dřívky. Pro která $k, n \in \mathbb{N}$ má 1. hráč vyhrávající strategii v α_n^k?

b) Pro každé $k \in \mathbb{N}$ a $n \in \mathbb{N}$ najděte číslo $a_n^k \in \mathbb{N}$ t.ž. $\alpha_n^k \equiv \star a_n^k$.

c) Buď β_n $\{1, 4, 5\}$-dřívková hra s n dřívky. Pro která $n \in \mathbb{N}$ má 1. hráč vyhrávající strategii v β_n?

d) Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ najděte b_n t.ž. $\beta_n \equiv \star b_n$.

---

3) Pro dvě přirozená čísla binárně zapsaná jako $x = x_1 x_2 \cdots x_n$ a $y = y_1 y_2 \cdots y_n$ definujme $x \oplus y$ jako to přirozené číslo z, jež má v binárním zapise na i-té pozici jedničku právě tehdy když $z_i + y_i = 1$. Informatickými slovy, $x \oplus y$ je XOR čísel x a y. Připomeňme též, že pro NIMsla platí $\star x + \star y \equiv \star z$.

   Buď x a y dvě přirozená čísla, a $z := x \oplus y$. Dokažte, že

$$\{0, 1, \ldots, z-1\} \subseteq \{x, x \oplus 1, x \oplus 2, \ldots, x \oplus (y-1)\} \cup \{y, y \oplus 1, y \oplus 2, \ldots, y \oplus (x-1)\}.$$