Teorie her

LS 2020/21, FJFI ČVUT

3. domací úlohy

Nechť H je strategická hra pro n hráčů, kde každý hráč $i \in \{1, \ldots, n\}$ má k dispozici (konečnou) množinu čistých strategií S_i a jeho zisk je dán funkcí $u_i : \prod_j S_j \to \mathbb{R}$. Pro strategie s a t nějakého hráče i definujme

- s je *sktriktně dominovaná* t jestliže $u_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \ldots, x_n) < u_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ a
- s je *slabě dominovaná* t jestliže $u_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \ldots, x_n) \leq u_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n)$

pro všechna $x_1 \in S_1, \ldots, x_{i-1} \in S_{i-1}, x_{i+1} \in S_{i+1}, \ldots, x_n \in S_n$. Dále řekneme, že s je *semi-sktriktně dominovaná* t jestliže s je slabě dominovaná t a zároveň existují nějaké $y_1 \in S_1, \ldots, y_{i-1} \in S_{i-1}, y_{i+1} \in S_{i+1}, \ldots, y_n \in S_n$ takové, že $u_i(y_1, \ldots, y_{i-1}, s, y_{i+1}, \ldots, y_n) \leq u_i(y_1, \ldots, y_{i-1}, t, y_{i+1}, \ldots, y_n)$.

Eliminací strategie s hráče i ze hry H rozumime hru $\widetilde{H}$, kde hráč i má k dispozici množínu strategií $S_i \setminus \{s\}$, ostatní hráči $j \neq i$ mají k dispozici množiny strategií S_j, a ziskové funkce v $\widetilde{H}$ jsou dány zúžením původních ziskových funkcí u_j. Přirozený postup při studiu strategických her je postupně eliminovat dominované strategie, dokud výsledná hra po eliminaci neobsahuje žádnou dominovanou strategii. Posloupnost dominovaných strategií, jejiž eliminace vedla z H do hry neobsahující dominovanou strategii, nazveme *maximální.*

1a) Dokažte, že v každé strategické hře mají každé dvě maximální posloupnosti postupného eliminování **striktně dominovaných** strategií za výsledek stejnou zredukovanou hru.

1b) Dokažte, že v každé strategické hře mají každé dvě maximální posloupnosti postupného eliminování **slabě** dominovaných strategií za výsledek stejnou zredukovanou hru.

1c) Zkonstruujte hru dvou hráčů a pro ní dvě maximální eliminační posloupnosti **semi-striktně** dominovaných strategií takové, že příslušné dvě zredukované hry jsou různé.

2a) Uvažme obecnou hru H pro n hráčů, kde s_1 je nějaká striktně dominovaná strategie 1. hráče, a nechť $\widetilde{H}$ je odvozená z H eliminací strategie s_1. Dokažte, že množina všech mixovaných ekvilíbrií H přesně odpovídá množině všech mixovaných ekvilíbrií $\widetilde{H}$.

2b) Zkonstruujte hru dvou hráčů, která má čisté ekvilíbrium, a k ní nějakou eliminační posloupnost semi-striktně dominovaných strategií tak, aby výsledná hra neměla žádné čisté ekvilíbrium.

Uvažme hru s nulovým součtem H, a nechť (r_1, s_1) a (r_2, s_2) jsou dvě mixovaná Nashova ekvilíbria H.

3a) Dokažte, že očekávaný zisk prvního hráče v (r_1, s_1) je stejný jako v (r_2, s_2).

3b) Dokažte, že (r_1, s_2) (a ze symetrie tudíž i (r_2, s_1)) je Nashovo ekvilíbrium H.