Teorie kódování

LS 2020/21, FJFI ČVUT

4. domací úlohy

Hadamardova matice H velikosti n je $n \times n$ matice s hodnotami ± 1 taková, že každé dva různé řádky jsou na sebe kolmé. Jinými slovy

$$H \cdot H^T = n \times I_n,$$

kde I_n je jednotková matice. Např. $H_1 = \begin{pmatrix} +1 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix}, \quad H_4 = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \end{pmatrix}.$

1) Dokažte, že má-li Hadamardova matice velikost $n \geq 3$, potom n musí být dělitelné 4.

2) Buď A a B dvě Hadamarovy matice velikosti n resp. m, a buď H tenzorový součin $A \otimes B$, tj. čtvercová matice velikosti $mn \times mn$ získaná následující kompozicí A a B:

$$H = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & & & \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \dots & a_{nn}B \end{array}\right).$$

Dokažte, že H je Hadamarova matice.

3) Antisymetrická čtvercová matice A velikosti n je matice splňující $a_{ij} = -a_{ji}$ pro všechna $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Antisymetrická Hadamarova matice je Hadamarova matice navíc splňující $\frac{1}{2} \cdot (H + H^T) = I_n$, neboli antisymetrická matice s $+1$ na diagonále. Zkonstruujte nekonečně mnoho antisymetrických Hadamarových matic.