Teorie kódování

LS 2021/22, FJFI ČVUT

4. domací úlohy

1) Připomeňme, že Hadamardova matice H velikosti n je $n \times n$ matice s hodnotami ± 1 taková, že každé dva různé řádky jsou na sebe kolmé. Jinými slovy $H \cdot H^T = n \times I_n$, kde I_n je jednotková. Dokažte, že má-li Hadamardova matice velikost $n \geq 3$, potom je n dělitelné 4.

2) Buď A a C dvě čtvercové matice velikosti n a B a D dvě čtvercové matice velikosti m. Připomeňme, že tenzorový součin $A \otimes B$ je čtvercová matice H velikosti $mn \times mn$ získaná následující kompozicí A a B:

$$H = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & & & \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \dots & a_{nn}B \end{array} \right).$$

Dokažte, že $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$.

3a) Symetrická čtvercová matice A velikosti n je matice splňující $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Symetrická Hadamardova matice H je Hadamardova matice která je navíc symetrická, jinými slovy, H je ± 1 matice splňujícící

$$H \cdot H^T = n \times I_n \quad \text{a} \quad H = H^T.$$

Zkonstruujte nekonečně mnoho symetrických Hadamardových matic.

3b) Antisymetrická Hadamardova matice je Hadamardova matice s $+1$ na diagonále a splňující $a_{ij} = -a_{ji}$ pro všechna <u>různá</u> $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Jinými slovy, H je ± 1 matice splňujícící

$$H \cdot H^T = n \times I_n \quad \text{a} \quad H + H^T = 2 \times I_n.$$

Zkonstruujte nekonečně mnoho antisymetrických Hadamardových matic.

4) Nalezněte co nejlepší dolní odhad L a horní odhad R na $A(16, 6)$, tzn. nejlepší možnou velikost binárního kódu délky 16 s minimální vzdáleností 6. Vaše odhady je třeba zdůvodnit!

   Hodnocení této úlohy bude nepřímo úměrné hodnotě $R - L$. Plný počet z této úlohy bude za $R - L < 150$; lepší odhady znamenají extra body navíc, horší pak méně než plný počet bodů.