Diskrétní matematika: písemka 1

Vše, co tvrdíte, podrobně zdůvodněte. Můžete bez důkazu používat tvrzení z přednášky nebo ze cvičení, uvádějte však jejich znění. Nepoužívejte kalkulačky, zápisky, učebnice, sousedy ani jiné pomůcky. V případě nejasností se ptejte cvičícího. Tento papír si můžete nechat. Zadání úloh není třeba opisovat, stačí se odkazovat číslem úlohy. Na práci máte 60 minut.

Úloha 1. Rozhodněte zda relace R definovaná na množině všech přirozených čísel bez 0 předpisem $R = \big\{(x, y) : x^2 - y^2 \leq 5\big\}$ je

a) reflexivní, *(2 body)*
b) symetrická, *(2 body)*
c) slabě antisymetrická, *(2 body)*
d) tranzitivní, *(2 body)*
e) částečné uspořádání, *(1 bod)*
f) ekvivalence. *(1 bod)*

Úloha 2. Kolik je všech slabě antisymetrických relací na množině $\{1, 2, \ldots, n\}$? *(8 bodů)*

Úloha 3. Jaký je počet všech rozesazení u kulatého stolu pro čtyři vodníky, tři čarodějnice a pět čertů takových, aby se nestalo, že nějaký pohádkový druh sedí celý pohromadě? (Všechny postavy jsou navzájem rozlišitelné a rozesazení lišící se pouze pootočením stolu považujeme za stejná.) *(8 bodů)*

Úloha 4. Najděte uzavřenou formuli (vzorec bez sum) pro následující výrazy:

a) pro přirozená čísla m a n, která jsou větší nebo rovna přirozenému číslu k, *(6 bodů)*

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i},$$

b) *(8 bodů)*

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i^2.$$

Úloha 5. Máme tři různé druhy vína a k nim příslušné tři etikety. Etikety na lahve nalepíme náhodně, jaká je pravděpodobnost, že

a) nalepíme vše správně, *(2 body)*
b) jednu etiketu správně a dvě špatně, *(3 body)*
c) alespoň jednu etiketu správně? *(5 bodů)*