Diskrétní matematika: série 4 – kombinatorické počítání

Všechny kroky řešení je třeba pečlivě zdůvodnit či dokázat.

Úloha 1. Spočtěte, kolika různými způsoby lze rozmístit n navzájem nerozlišitelných věží na šachovnici velikosti $n \times n$, aby se žádné dvě navzájem neohrožovaly. (Dvě věže se ohrožují, jsou-li ve stejném řádku nebo sloupci.) *(1 bod)*

Úloha 3. Najděte uzavřenou formuli (vzorec bez sum) pro následující výrazy. Vyšší počet bodů je za řešení kombinatorickou úvahou.

a) *(2 body/3 body)*

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$$

b) *(2 body/3 body)*

$$\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i}$$

c) pro $k \leq n$ *(2 body/3 body)*

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i}\binom{i}{k}$$

Úloha 3. Najděte uzavřenou formuli pro $\Box_n$ (*n-té čtverečkové číslo*). Pokud si vzorec někde zjistíte a dokážete jeho platnost např. matematickou indukcí, získáte jeden bod.

$$\Box_n = \sum_{i=1}^{n} i^2$$

(3 body)

Úloha 4. Na jednom pražském sídlišti lidé žijí velmi společenským životem. Deset lidí je v klubu mladých socialistů, patnáct členů má tamní spolek přátel piva a ve spolku matfyzák je celkem lidí osm. Přitom dva socialisté jsou také členy matfyzáckého spolku, čtyři matfyzáci nosí odznáček s půllitrem a sedm přátel piva se angažuje u socialistů. Jeden obzvláště aktivní člověk je členem všech tří organizací a tak vyjma schůzování nedělá nic jiného. Kolik lidí se celkem na sídlišti účastní klubových aktivit? *(1 bod)*