Diskrétní matematika: série 9 – grafy podruhé

Všechny kroky řešení je třeba pečlivě zdůvodnit či dokázat.

Graf se nazývá k-regulární, pokud každý jeho vrchol má stupeň právě k.

Úloha 1. Dokažte, že každé dva $n-1$ regulární grafy na n vrcholech jsou izomorfní. *(1 bod)*

Úloha 2. Dokažte, že každé dva $n-2$ regulární grafy na n vrcholech jsou izomorfní. *(2 body)*

Úloha 3. Pro jaké dvojice n a k existuje k-regulární graf na n vrcholech? *(4 body)*

Úloha 4. *Automorfismus* grafu $G = (V, E)$ je každý izomorfismus G se sebou samým, neboli bijekce $f : V \to V$ taková, že $\{u, v\} \iff \{f(u), f(v)\}$. Graf se nazývá *strnulý*, je-li jediný jeho automorfismus identita. Najděte příklad asymetrického grafu a dokažte o něm, že je asymetrický. *(3 body)*

Úloha $\infty + 4$. *Řešení této úlohy lze odevzdávat až do konce semestru.* Dokažte následující analogii věty o existenci Eulerovského tahu v orientovaných grafech:

Věta. *V orientovaném grafu $\vec{G} = (V, E)$ existuje orientovaný uzavřený Eulerovský tah právě když $\vec{G}$ je slabě souvislý, tj. mezi každými dvěma vrcholy vede cesta, která nemusí respektovat orientaci hran, a $\forall v \in V : deg^+ v = deg^- v$, neboli pro každý vrchol platí, že vstupní stupeň je roven jeho stupni výstupnímu.* *(5 bodů)*

Diskrétní matematika: série 9 – grafy podruhé

Všechny kroky řešení je třeba pečlivě zdůvodnit či dokázat.

Graf se nazývá k-regulární, pokud každý jeho vrchol má stupeň právě k.

Úloha 1. *Dokažte, že každé dva $n-1$ regulární grafy na n vrcholech jsou izomorfní.* *(1 bod)*

Úloha 2. *Dokažte, že každé dva $n-2$ regulární grafy na n vrcholech jsou izomorfní.* *(2 body)*

Úloha 3. *Pro jaké dvojice n a k existuje k-regulární graf na n vrcholech?* *(4 body)*

Úloha 4. *Automorfismus grafu $G = (V, E)$ je každý izomorfismus G se sebou samým, neboli bijekce $f : V \to V$ taková, že $\{u, v\} \iff \{f(u), f(v)\}$. Graf se nazývá strnulý, je-li jediný jeho automorfismus identita. Najděte příklad asymetrického grafu a dokažte o něm, že je asymetrický.* *(3 body)*

Úloha $\infty + 4$. *Řešení této úlohy lze odevzdávat až do konce semestru. Dokažte následující analogii věty o existenci Eulerovského tahu v orientovaných grafech:*

Věta. *V orientovaném grafu $\vec{G} = (V, E)$ existuje orientovaný uzavřený Eulerovský tah právě když $\vec{G}$ je slabě souvislý, tj. mezi každými dvěma vrcholy vede cesta, která nemusí respektovat orientaci hran, a $\forall v \in V : deg^+ v = deg^- v$, neboli pro každý vrchol platí, že vstupní stupeň je roven jeho stupni výstupnímu.* *(5 bodů)*