Kombinatorika a grafy III – 2. série domácích úkolů

Pro získání zápočtu je potřeba z **každé** série domacích úkolů vyřešit správně alespoň 1/3 úloh. Studenti kombinovaného studia, kteří se neúčastní cvičení, potřebují z každé série vyřešit alespoň 2/3 úloh. Řešení vysázené pomocí programu určeného pro sazbu matematiky (např. TEX) zasílejte do **úterý 3.1. 15:39** na email *volec@kam.mff.cuni.cz*, případně ho můžete odevzdávat osobně na cvičení (pak samozřejmě můžete odevzdat řešení napsané rukou; důrazně však žádám o nezasílání fotek/scanu rukou psaného řešení emailem). Budete-li mít jakýkoli dotaz k zadání, ozvěte se mi na výše uvedený email.

Značení a definice používané v této sérii:

Pro graf $G = (V, E)$ řekneme, že rozklad $(V_0, V_1, V_2, \dots, V_l)$ tvoří ε-regulární rozklad jeho množiny vrcholů, pokud platí

- $|V_0| < \varepsilon|V|$ a $|V_i| = |V_j|$ pro každé $1 \leq i, j \leq l$,
- všechny až na εl^2 dvojic (V_i, V_j) pro $1 \leq i, j \leq l$ tvoří ε-regulární pár.

Dále pro ε-regulární rozklad $(V_0, V_1, V_2, \dots, V_l)$ grafu G a číslo $d \in [0, 1]$ definujme ε-rozkladový graf R s hraniční hustotou d následujícím způsobem:

- $V(R) = [l] = \{1, 2, \dots, l\}$
- $\{i, j\} \in E(R)$ právě tehdy když dvojice (V_i, V_j) tvoří ε-regulární pár, a počet hran mezi V_i a V_j v G je alespoň $d \cdot |V_i||V_j|$. Jinými slovy, (V_i, V_j) má hustotou alespoň d.

Pro libovolný graf G definujme jeho s-nafouknutí jako graf G_s, který vznikne z G nahrazením každého jeho vrcholu nezávislou množinou velikosti s a každé jeho hrany úplným bipartitním grafem $K_{s,s}$. Jinými slovy, $V(G_s) = V(G) \times [s]$ a $\{(u, i), (v, j)\}$ je hrana G_s právě tehdy, když $\{u, v\}$ je hrana G, $i \in [s]$ a $j \in [s]$.

Úloha 1. *Varianty Removal lemmatu.*

a) Pro každý bipartitní graf H dokažte Removal lemma pro H, tj. že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pokud G obsahuje méně než $\delta n^{|H|}$ kopií grafu H, tak lze v G najít množinu hran X, $|X| < \varepsilon n^2$, takovou, že G bez X neobsahuje H jako podgraf.

b) Dokažte Removal lemma pro úplný graf na pěti vrcholech (K_5), tj. že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pokud G obsahuje méně než δn^5 kopií grafu K_5, tak lze v G najít množinu hran X, $|X| < \varepsilon n^2$, takovou, že G bez X neobsahuje K_5 jako podgraf.

Úloha 2. *Regularity lemma je (téměř) trivialní pro řídké grafy.*

a) Dokažte, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $d > 0$ takové, že každý bipartitní graf s oběma partitami velikosti $n/2$ a s nejvýše dn^2 hranami tvoří ε-regulární pár.

b) Dokažte, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $d > 0$ takové, že každý graf na n vrcholech a s nejvýše dn^2 hranami obsahuje nejvýše εn vrcholů stupně alespoň εn.

c) buď $\mathcal{C}$ nekonečná třída grafů, kde každý graf z $\mathcal{C}$ na n vrcholech má nejvýše $c(n) \cdot n^2$ hran pro nějakou funkci $c(n)$ splňující $\lim_{n\to\infty} c(n) = 0$. Bez použití SRL ukažte, že pro každé $\varepsilon > 0$ a $k \in \mathbb{N}$ existuje $K \in \mathbb{N}$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že kazdý graf z $\mathcal{C}$ na alespoň n_0 vrcholech má ε-regulární rozklad na l částí, kde $k \leq l \leq K$.

Úloha 3 (*)**.** *Vnořování grafů s omezeným maximálním stupněm.*

a) Ukažte, že pro každé $d > 0$ a $\Delta \in \mathbb{N}$ existuje $\varepsilon_0 := \varepsilon_0(d, \Delta)$ takové, že pro libovolné $m \in \mathbb{N}$ a $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ platí, že

- $\frac{1}{2}d^\Delta \cdot m \geq \varepsilon \cdot m$ a
- $\big((d-\varepsilon)^\Delta - \Delta\varepsilon\big) \cdot m \geq \frac{1}{2}d^\Delta \cdot m$.

b) Dokažte, že pro daná $d > 0$, $\Delta \in \mathbb{N}$ a $\varepsilon \leq \varepsilon_0(d, \Delta)$, kde ε_0 je stejné jako v části (a), platí následující. Pokud

- G je graf, $(V_0, V_1, \ldots, V_l)$ jeho ε-regulární rozklad a $m := |V_1| = \ldots = |V_l|$,
- R příslušný ε-rozkladový graf G s hraniční hustotou d,
- R_s s-nafouknutí R pro $s \leq \frac{1}{2}d^\Delta \cdot m$,
- H libovolný podgraf R_s s maximálním stupněm $\Delta(H) \leq \Delta$,

potom H je podgraf G.

Hint: Libovolně uspořádejte vrcholy H a po jednom je vnořujte do G. Ke každému dosud nevnořenému vrcholu H si udržujte seznam možných kandidatů v G, kteří jsou konzistentní s dosud vnořenou částí H. Při vnořování nějakého vrcholu $v \in H$ vyberte vrchol z jeho kandidátské množiny. Ten je potřeba zvolit šikovně, aby se kandidátské množiny pro sousedy v, kteří budou vnořeni až po v, příliš nezmenšily.

c) Pomocí SRL vyvoďte z části (b), že pro každé $d > 0$, $\Delta \in \mathbb{N}$ a $\varepsilon \leq \varepsilon_0(d, \Delta)$ existuje $C := C(d, \Delta, \varepsilon)$ takové, že platí následující. Má-li graf G alespoň Cn vrcholů a pro nějaký jeho ε-regulární rozklad obsahuje příslušný ε-rozkladový graf s hraniční hustotou d graf $K_{\Delta+1}$ jako podgraf, potom G obsahuje všechny grafy H s n vrcholy a maximálním stupněm Δ jako podgrafy.