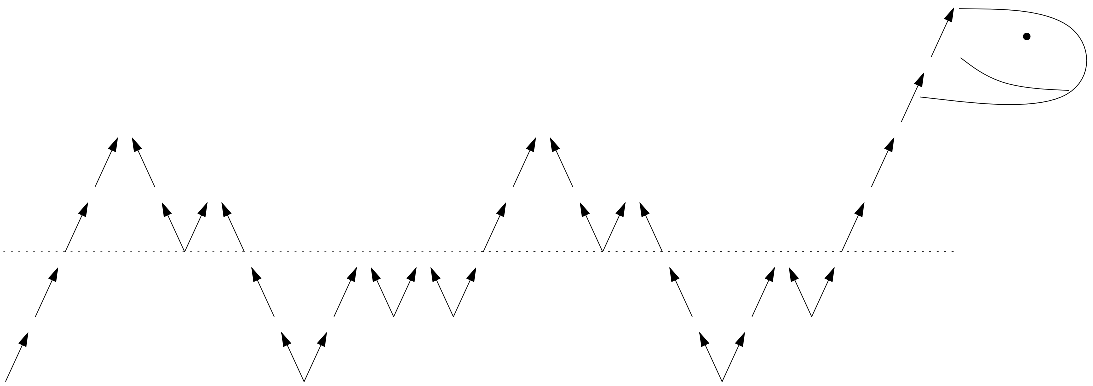
Universita Karlova v Praze
Matematicko–fyzikální fakulta

Diplomová práce

Jan Hubička

Ramseyovské vlastnosti univerzálních množin



Katedra aplikované matematiky
Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Jaroslav Nešetřil, DrSc.
Studijní program: Informatika

V první řadě děkuji profesoru Nešetřilovi za zasvědcení mě do tématu práce, trpělivé vedení, mnoho podnětných nápadů a připomínek a zejména za to, že na mě v pravý čas zakřičel. Děkuji Martinu Marešovi, že mi potom dodal odvahy. Jsem také velice vděčný Johance Doležalové, která si práci přečetla a opravila bezpočet prohřešků proti mé mateřtině. Ze stejného důvodu děkuji i mé babičce, Marii Šechtlové.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 1.1.2002 Jan Hubička

Obsah

Seznam obrázků

Název práce: Ramseyovské vlastnosti univerzálních množin

Autor: Jan Hubička

Katedra (ústav): Katedra aplikované matematiky

Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Jaroslav Nešetřil, DrSc.

e–mail vedoucího: `nesetril@kam.ms.mff.cuni.cz`

Abstrakt: V práci popisujeme vztah Ramseyovských vlastností k homogenitě a univerzalitě struktur. Později pak ukazujeme popis nové homogenní a univerzální částečně uspořádané množiny $\mathcal{H}$ a ukazujeme její vztah k Conwayovým nadreálným číslům. Tuto strukturu pak používáme k popisu univerzálního orientovaného acyklického grafu a k novému důkazu univerzality multiřezů. Nalézáme novou strukturu, ořezané vektory $\mathcal{TV}$, která tvoří duál k multřezům a ukázala se jako užitečný krok k uzavření otázky o univerzalitě třídy konečných orientovaných cest uspořádané grafovými homomorfismy. Ukazujeme tento nový důkaz a použijeme jej k důkazu univerzality třídy konečných neorientovaných rovinných grafů omezeného stupně uspořádané homomorfismy.

Klíčová slova: Grafy, homomorfismy, univerzalita, homogenita, rozšiřující vlastnosti

Title: Ramsey properties of universal sets

Author: Jan Hubička

Department: Katedra aplikované matematiky

Supervisor: Prof. RNDr. Jaroslav Nešetřil, DrSc.

Supervisor's e–mail address: `nesetril@kam.ms.mff.cuni.cz`

Abstract: In this thesis we describe correspondence between the Ramsey properties and the subjects of universality and homogenity of the relational structures. Later we show description of new homogene and universal partially ordered set and its relation to Conway's surreal numbers. We use this structure for description of universal oriented acyclic graph and for new proof of universality of multicuts. We show new structure, truncated vectors $\mathcal{TV}$, as dual structure to multicuts. We found this structure as useful step to close problem of universality of the class of oriented paths ordered by graph homomorphisms. We show this new proof and use it to prove universality of class of undirected planar graphs of limited degree ordered by homomorphisms.

Keywords: Graphs, homomorphisms, universality, homogenity,
extension properties

Slovo úvodem

V předkládané práci studujeme vlastnosti univerzální částečně uspořádané množiny. Podobně, jako R. Rado [20] v případě univerzálního grafu, jsme nalezli lokální popis homogenní částečně uspořádané struktury na kterou lze nahlížet jako na zobecnění Conwayových nadreálných čísel. Věříme, že právě lokální popis usnadní další výsledky v této oblasti stejně, jako se tomu stalo v případě grafů.

Dále se pak věnujeme studiu alternativních reprezentací univerzálních částečně uspořádaných množin a jejich vztahu ke grafovým homomorfismům. Nalezli jsme novou částečně uspořádanou množinu $\mathcal{TV}$, která se ukázala jako vhodná k uzavření problému o univerzalitě třídy všech orientovaných cest uspořádané grafovými homomorfismy.

Jelikož struktura orientovaných cest je velice jednoduchá, můžeme přesněji popsat vlastnosti nutné pro třídu grafů, tak aby částečné uspořádání tvořené homomorfismy bylo univerzální, než bylo možné z předchozích výsledků o univerzalitě třídy všech grafů publikovaných Z. Hedrlínem [7] a později zjednodušených J. Nešetřilem [14]. Například lze snadno odvodit univerzalitu třídy všech konečných rovinných grafů omezeného stupně.

Práce je organizována následujícím způsobem. V kapitole 1 je úvod do grafových homomorfismů, v kapitole 2 je úvod do pojmů univerzality a homogenity struktury a stručný přehled stávajících výsledků o vztahu homogenity k Ramseyovským vlastnostem. V kapitole 3 uvádíme lokální popis univerzální a homogenní částečně uspořádané množiny $\mathcal{H}$. Konečně pak v kapitole 4 uvádíme nový důkaz univerzality multiřezů převodem ze struktury $\mathcal{H}$ a novou strukturu $\mathcal{TV}$ tvořící přirozený duál k multiřezům. Tuto strukturu použijeme k důkazu univerzality třídy všech disjunktních sjednocení konečných orientovaných cest a později i k vlastnímu důkazu univerzality třídy všech konečných orientovaných cest.

Kapitola 1

Grafy a homomorfismy

V této kapitole najdete úvod do základních pojmů a grafových operací použitých v této práci. Názvosloví je v souladu se články J. Nešetřila [14, 18].

Definice. Mějme dva grafy (orientované či neorientované) $G = (V, E)$ a $G' = (V', E')$. Funkci $f : V \to V'$ nazveme *homomorfismem grafu G do G'*, pokud $(f(a), f(b)) \in E'$ pro všechna $(a, b) \in V$.

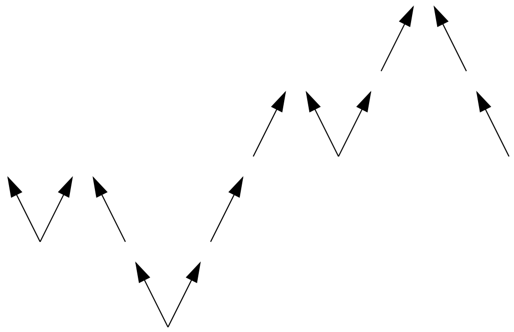
Pokud existuje homomorfismus G do G', budeme psát $G \to G'$. Pokud existuje navíc i homomorfismus G' do G, budeme říkat, že G a G' jsou *homoekvivalentní* a psát $G \simeq G'$.

Homomorfismy grafů byly studovány z mnoha pohledů — jako algebraická struktura, nebo v souvislosti s produktivními grafy. Srdce studenta teorie grafů zajisté ale nejvíce zaplesá, když si uvědomí, že neorientovaný graf G je obarvitelný k barvami právě tehdy, když existuje jeho homomorfismus do úplného grafu o k vrcholech. Na homomorfismy lze nahlížet jako na zobecnění barevnosti grafů a také se v tomto kontextu často existence homomorfismu do daného grafu H nazývá H–obarvitelností.

Relace $\to$ je zjevně tranzitivní, jelikož homomorfismy lze skládat. Je praktické nahlížet na existenci homomorfismu jako na kvaziuspořádání třídy všech grafů. Relace $\simeq$ je ekvivalence a z každé třídy ekvivalence $\simeq$ lze vybrat reprezentanta s nejmenším počtem vrcholů. Pro libovolný graf G nazveme reprezentanta jeho třídy ekvivalence *duší grafu G*. Pokud je graf sám sobě duší, budeme říkat, že graf je *duše*.

Věta 1.0.1 *Duše konečného grafu je, až na isomorfismus, jednoznačně definována.*

Důkaz. Nechť $G \simeq H$ jsou dvě duše. Homomorfismus z grafu G do H nazveme f a jeho obor hodnot $M \subseteq V(H)$. Pokud $M = V(H)$, pak f je bijekce ($|G| = |H|$) a tedy i isomorfismus.



Obrázek 1.1: Orientovaná cesta P

Pokud $M \subset V(H)$, pak graf indukovaný množinou M patří do stejné třídy ekvivalence a je menší než duše, což je spor s definicí duše. $\square$

Poznámka. Věta neplatí pro nekonečné grafy. Například úplný graf na ω vrcholech K_ω je homo-ekvivalentní K_ω po odebrání jedné hrany, ale oba grafy jsou minimální na počet vrcholů ve své třídě ekvivalence.

Třídu všech tříd ekvivalence $\simeq$ (nebo ekvivalentně třídu všech duší orientovaných grafů) částečně uspořádanou operací $\rightarrow$ budeme značit $\mathcal{C}$, z anglického „coloring order". Právě vlastnosti částečně uspořádané struktury $\mathcal{C}$ budou podrobněji studovány v této práci.

1.1 Homomorfismy cest

Orientované cesty jsou jednou z nejtriviálnějších tříd grafů:

Definice. Orientovaný graf $P = (V, E)$ nazveme *orientovanou cestou*, pokud $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ a pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ buď $[v_i, v_{i+1}] \in E$, nebo $[v_{i+1}, v_i] \in E$ (ne však obě) a graf nemá žádné další hrany.

Orientovanou cestou je tak libovolná orientace neorientované cesty. Vrchol v_1 nazveme *prvním vrcholem* a v_n *posledním vrcholem* cesty P.

Je možné zapisovat cestu P pomocí *kódu*, $c(P) = a_1 a_2 \ldots a_n$, kde $a_i = 0$, nebo 1, podle toho, zda je i-tá hrana orientovaná dopředu, nebo zpět. Například cesta na obrázku 1.1 má kód $c(P) = 010011101100$.

Pro cestu P s kódem $c(p) = a_1 a_2 \ldots a_n$ nazveme cestu s kódem $(1 - a_n)(1 - a_{n-1})(1 - a_{n-2}) \ldots (1 - a_1)$ *cestou vzniklou obrácením* P a budeme ji značit $\overleftarrow{P}$. Cesta $\overleftarrow{P}$ je tedy shodná s P po prohození rolí prvního a posledního vrcholu.

Délka cesty P je počet hran P. *Algebraická délka cesty* P, $al(P)$ je počet jedniček mínus počet nul v kódu cesty P. Na obrázku 1.1, kde jsou všechny šipky orientovány vzhůru, je algebraická délka rovna výškové vzdálenosti počátku od konce. V tomto případě je nulová, ale může být i záporná. *Výška cesty* je maximální absolutní hodnota algebraické délky podcesty, tedy výšková vzdálenost nejnižšího a nejvyššího vrcholu cesty, u cesty na obrázku je 4.

Pro cesty $c(P_1) = a_1a_2 \dots a_n$ a $c(P_2) = b_1b_2 \dots b_n$ nazveme cestu s kódem $a_1a_2 \dots a_n\ b_1b_2 \dots b_n$ *cestou vzniklou spojením cest* P_1 *a* P_2 a budeme značit P_1P_2.

Narozdíl od grafů jsou homomorfismy cest mnohem jednodušší a byly podrobně zkoumány v [6, 8, 9, 18]. Jedním ze zajímavých výsledků je následující jednoduchá věta, která pracuje s kódy cest jako se slovy nad abecedou $0, 1$.

Věta 1.1.1 (Homomorfismy slov) *Pro konečné cesty P a P' jsou následující dvě tvrzení ekvivalentní:*

1. $P \to P'$
2. *existují slova c a c' na abecedě $0, 1$ taková, že $c(P)$ je souvislý segment c a c' je souvislý segment $c(P')$ a c' může být vytvořeno z c sekvencí operací ve formě:*
$$ww^{-1}w \to w$$
kde w je libovolné slovo na abecedě $0, 1$.

Navíc délka c je menší než $|V(P)| + |V(P')|$

Důkaz. Cesta, která vznikne nahrazením podcesty cesty w za cestu $ww^{-1}w$, je zjevně homomorfní do původní cesty, a tak je věta na jednu stranu triviální. Opačným směrem:

Nechť f je homomorfismus cesty a do cesty b. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že f je na $V(b)$ a první vrchol cesty a je zobrazen na první vrchol cesty b a obdobně i poslední vrcholy jsou zobrazeny na sebe. Pokud tomu tak není, můžeme cestu a vždy rozšířit. Nechť $c = c(a)$ a $c' = c(b)$

Očíslujme si vrcholy b v pořadí od prvního k poslednímu a zapišme f jako posloupnost přirozených čísel $f_n = (v_1, v_2, \dots v_{|a|})$. Předpokládejme, že $a \neq b$, a zkonstruujme operací $ww^{-1}w \to w$ na slově c kód nové kratší cesty a', kde platí, že $a \to a' \to b$:

V posloupnosti f_n najdeme podposloupnost $(p, p+1, \dots, q-1, q, q-1, \dots, p+1, p, p+1, \dots, q-1, q)$, případně $(p, p-1, \dots, q+1, q, q+1, \dots, p-1, p, p-1, \dots, q-1, q)$ pro nějaká přirozená čísla $p \neq q$.

Protože $|a| > |b|$, pro každou dvojici v_n, v_{n+1} platí, že $v_n = v_{n+1} + 1$, nebo $v_n = v_{n+1} - 1$, musí se v posloupnosti nacházet alespoň dva vrcholy, kde posloupnost mění směr (z rostoucí na klesající, nebo naopak).

Vezmeme dva takové vrcholy $f_a = p$ a $f_b = q$, $a > b$, které se v posloupnosti vyskytují nejblíž k sobě (mají minimální $|a - b|$). Posloupnost $(f_{a-(b-a)}, f_{a-(b-a)+1}, \dots, f_{b+(b-a)-1}, f_{b+(b-a)})$ už musí být v požadované formě, protože jinak by musely existovat dva bližší a' a b'. Potom w bude úsek cesty mezi prvními výskyty p a q. Jelikož posloupnost f_n vyjadřuje homomorfismus, kód úseku cesty mezi $a - (b - a)$-tým a $b + (b - a)$-tým vrcholem už musí odpovídat $ww^{-1}w$.

Tento postup budeme opakovat, dokud nedostaneme kód c'. □

Nyní už asi nebude překvapením ani následující výsledek:

Věta 1.1.2 (Polynomialita testování homomorfismů cest [22]) *Existuje algoritmus, který pro daný orientovaný graf G a orientovanou cestu P rozhodne v čase polynomiálním k velikosti G a P, zda existuje homomorfismus $G \to P$.*

Praktické při hledání homomorfismu, nebo naopak při dokazování jeho neexistence, je jednoduché pozorování, že homomorfismus dvou cest zachovává absolutní hodnoty algebraických vzdáleností všech podcest. Proto nelze například cestu vyšší zobrazit do cesty nišší. Můžeme navíc dokázat:

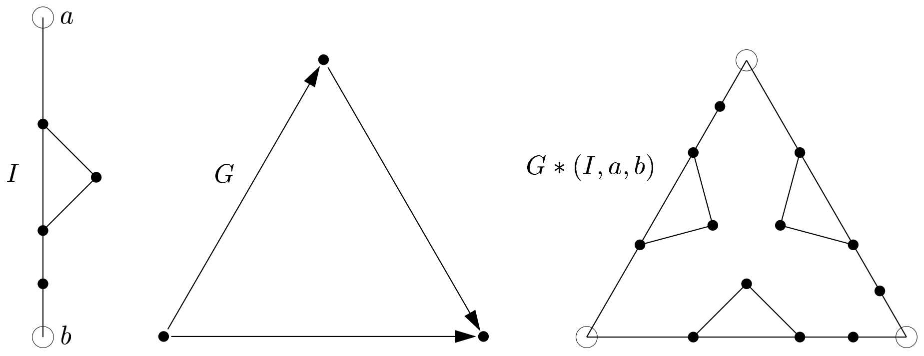
Věta 1.1.3 *Duší cesty výšky 3 je cesta s kódem $c(d) = 11(01)^n1$, kde $(01)^n$ značí libovolný počet opakování cesty s kódem 01.*

Důkaz. Nechť c je libovolná cesta výšky 3 udaná nepřítelem a d je nejkratší podcesta c výšky 3. Dokážeme, že d je duší c:

Kód cesty d už musí být v požadované formě — cesta musí dosahovat obou extrémů v krajních bodech a nikde mezi, jinak by bylo možné ji zkrátit. Zjevně $d \to c$. V opačném směru budeme homomorfismus $c \to d$ konstruovat tak, že extrémy cesty c zobrazíme na odpovídající extrémy d a střídavých cest mezi ($(01)^m$, kde $m \geq n$) použijeme k přechodu z jedné strany c na druhou, pokud je potřeba. □

Důsledek. Struktura $\mathcal{C}$ omezena na třídu orientovaných cest výšky 3 je lineárně uspořádaná podle délky duše.

I přes tato pozorování o relativní jednoduchosti homomorfismů cest ve srovnání s homomorfismy grafů ale ukážeme v kapitole 4.4, že si tyto zachovávají nejpodstatnější rysy bohatosti struktury $\mathcal{C}$.



Obrázek 1.2: Konstrukce $G * (I, a, b)$.

1.2 Indikátorová konstrukce

Nyní popíšeme jednu z grafových konstrukcí, která má obzvláště zajímavé vlastnosti z pohledu grafových homomorfismů:

Definice. Graf I (orientovaný či neorientovaný) s dvěma označenými vrcholy, a a b, nazveme *indikátorem.*

Pro daný orientovaný graf $G = (V, E)$ a indikátor (I, a, b) definujeme graf $G*(I, a, b) = (W, F)$ takto: Nechť $\sim$ je ekvivalence nad množinou $(E \times V(I))$ generovaná dvojicemi:

$$\begin{array}{rcl} ((x,y),a) & \sim & ((x,y'),a) \\ ((x,y),b) & \sim & ((x',y),b) \\ ((x,y),b) & \sim & ((y,z),a) \end{array}$$

Množina W jsou třídy ekvivalence $\sim$. Třídu ekvivalence dvojice $(e, x) \in E \times V(I)$ budeme značit $[e, x]$. Hranu z $[e, x]$ do $[e', x']$ vytvoříme právě tehdy, když $e = e'$ a navíc v grafu I vede hrana z x do x'. Graf $G * (I, a, b)$ je orientovaný právě tehdy, když I je orientovaný.

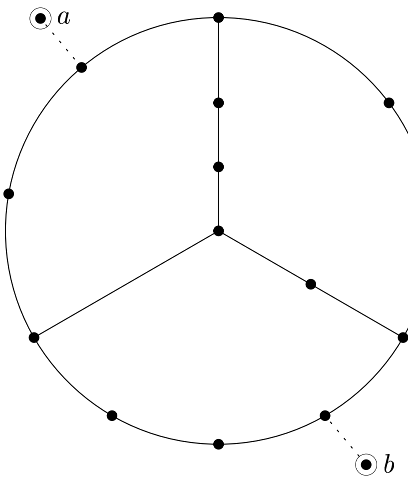
Konstrukce je schematicky nakreslena na obrázku 1.2.

Mnoho vlastností grafu $G * (I, a, b)$ záleží pouze na indikátoru (I, a, b). Při vhodné volbě indikátoru lze docílit toho, že:

$$G \to G' \text{ právě tehdy, když } G * (I, a, b) \to G' * (I, a, b)$$

A navíc pro každý homomorfismus $f : G * (I, a, b) \to G' * (I, a, b)$ existuje odpovídající homomorfismus: $g : G \to G'$ tak, že

$$f([(u, v), x]) = [(g(u), g(v)), x]$$



Obrázek 1.3: Strnulý indikátor I.

Indikátor splňující tyto podmínky nazveme *strnulým indikátorem.* Není těžké najít příklad strnulého indikátoru. Graf I na obrázku 1.3 podstatný pro tuto prací je částečně strnulým indikátorem, tedy podmínka $f([(u,v),x]) = [(g(u),g(v)),x]$ platí pouze pro $x \neq a,b$. Konkatenací čárkovanýh hran však dostaneme strnulý indikátor. Abychom to dokázali, nejprve ukážeme:

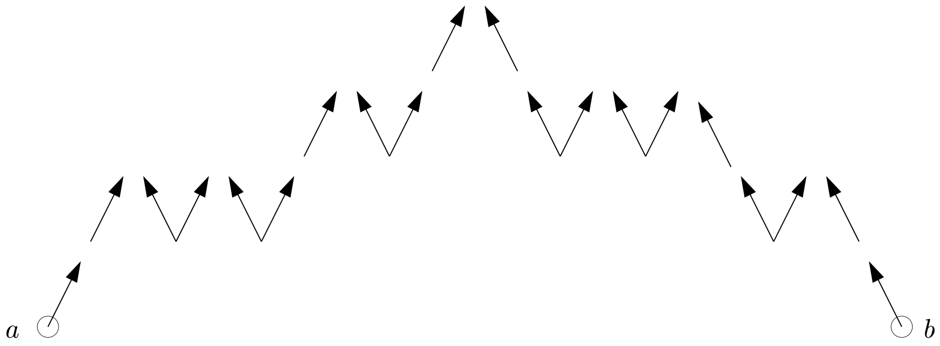
Lemma 1.2.1 *Graf vzniklý odebráním vrcholů a a b z I je strnulý, tedy existuje pouze jediný endomorfismus, a tím je identita.*

Důkaz. Podívejme se, jak může vypadat homomorfismus $f : I \to I$.

Graf se skládá ze tří sedmi-cyklů a neobsahuje žádné kratší kružnice. Protože lichá kružnice se vždy musí zobrazit na kratší nebo shodnou lichou kružnici, f nutně zobrazuje sedmi-cykly na sedmi-cykly.

Každý sedmi-cyklus obsahuje tři vrcholy stupně 3. Protože je ale každý cyklus obsahuje v rozdílných intervalech, nemohou se dva cykly zobrazit přes sebe. Jelikož středový vrchol je jediný obsažen ve všech třech cyklech, musí se zobrazit sám na sebe a opět kvůli odlišným vzdálenostem ostatních vrcholů stupně 3 se tyto musí zobrazit samy na sebe a vynutí si pozice všech zbývajících vrcholů. □

Je snadné nahlédnout, že indikátorovou konstrukcí nevzniknou žádné další sedmi-cykly, a tudíž se musí každá kopie indikátoru I zobrazit do kopie I. Pro každý homomorfismus $I \to G * (I, a, b)$ tak existuje hrana $e \in G$ taková, že pro každý $x \in V(I)$ $f(x) = [e, x]$ s výjimkou vrcholů a a b.



Obrázek 1.4: Strnulý indikátor I'.

Máme-li homomorfismus $f : G * (I, a, b) \to G' * (I, a, b)$, vytvoříme $f' : G \to G'$ tak, že $f(x)$ je první prvek dvojice $g([x, y])$, kde y je například středový vrchol I.

Mnoho vlastností grafu $G' = G * (I, a, b)$ lze vypozorovat z I. Například:

1. Barevnost G' je 3, jelikož I je 3 obarvitelný tak, aby a a b měly stejnou barvu.

2. G' nemá trojúhelníky.

3. Nejkratší lichá kružnice grafu G' má délku 7. Tuto délku lze libovolně zvětšit vhodným dělením hran I.

Z toho vyplývá, že částečné uspořádání vytvořené operací $\to$ na třídě všech 3 barevných neorientovaných grafů bez trojúhelníků s nejkratší lichou kružnicí délky sedm je stejně bohaté jako $\mathcal{C}$.

Konstrukce orientovaných indikátorů je ještě jednodušší. Na obrázku 1.4 najdete indikátor ve formě vyvážené orientované cesty.

Kapitola 2

Univerzální a homogenní struktury

Strukturu S nazveme *univerzální*, pokud každou strukturu S' stejného typu lze reprezentovat jako indukovanou podstrukturu S. Například spočetný graf G nazveme univerzálním, pokud každý spočetný graf je indukovaným podgrafem G. Obdobně se můžeme zabývat univerzálním grafem bez trojúhelníků, částečně uspořádanou množinou, univerzální spočetnou částečně uspořádanou množinou apod.

Pro definici použijeme relační struktury, které nabízejí dostatečnou úroveň abstrakce potřebnou pro popis jak grafů tak částečných uspořádání podstatných pro tuto práci:

Definice. Typ Δ je posloupnost $(\delta_i; i \in I)$ přirozených čísel. *Relační strukturou A typu Δ* nazveme dvojici $(X, (R_i; i \in I))$, kde X je množina a $R_i \subseteq X^{\delta_i}$, tedy R_i je δ_i-nární relace na X.

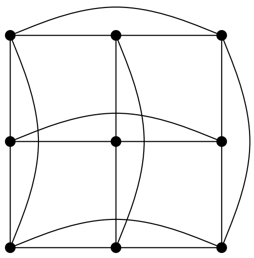
Relační strukturu $R = (X, (R_i; i \in I))$ nazveme *indukovanou podstrukturou* $R' = (X', (R'_i; i \in I))$, pokud mají shodný typ, $X \subseteq X'$ a pro všechna $i \in I$ R_i vznikne zúžením R'_i na X.

Funkce f je *vnoření struktury* $R = (X, (R_i; i \in I))$ *do* $R' = (X', (R'_i; i \in I))$, pokud R a R' jsou stejného typu, $f : X \to X'$ je prostá a pro všechna $i \in I$, $(x_1, x_2, \dots x_{\delta_i}) \in R_i$ právě tehdy, když $(f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots f(x_{\delta_i})) \in R'_i$.

Je-li f na X', nazveme ji *isomorfismem R a R'*. V případě, že f je isomorfismus R a R, nazveme ji *automorfismem R*.

Pro relační strukturu $R = (X, (R_i; i \in I))$ budeme psát $x \in R$ ve významu $x \in X$ a $M \subset R$ ve významu $M \subset X$.

Na (orientované) grafy i částečná uspořádání lze nahlížet jako na relační struktury typu (2) splňující dané axiomy. Budeme o nich mluvit obecně jako



Obrázek 2.1: Homogenní graf

o speciálních podtřídách třídy všech relačních struktur.

Definice. Relační struktura R je univerzální pro třídu struktur $\mathcal{K}$, pokud $R \in \mathcal{K}$ a pro každou relační strukturu $R' \in \mathcal{K}$ existuje vnoření R' do R.

Není těžké najít příklady některých univerzálních struktur. Například lineární uspořádání nad racionálními čísly je univerzální pro třídu všech spočetných lineárních uspořádání. Prvky libovolného spočetného lineárního uspořádání můžeme očíslovat přirozenými čísly a potom vkládat v pořadí. Prvnímu prvku přiřadíme 1 a druhému buď 0, nebo 2. Další vždy vkládáme na půl cesty od nejbližších sousedů.

Racionální čísla hrají podstatnou roli při studiu lineárních uspořádání, jelikož většinu vlastností dokázaných pro ně lze zobecnit na všechny spočetné lineárně uspořádané množiny. Stejná je situace i u jiných univerzálních množin a tak není překvapivé, že jejich studium se stalo velice populární.

Pro tuto práci je podstatný vztah univerzality k následující vlastnosti:

Definice. Relační strukturu R nazveme *homogenní*, pokud lze libovolný isomorfismus dvou indukovaných relačních podstruktur rozšířit na automorfismus R.

I když požadavek homogenity je velice silný — vyžaduje maximální symetrii mezi všemi prvky struktury, není těžké zkonstruovat netriviální příklady. Na obrázku 2.1 je ukázka konečného homogenního grafu.

2.1 Rozšiřující vlastnosti

Definice. O relační struktuře R řekneme, že má *k-rozšiřující vlastnost pro třídu relačních struktur $\mathcal{K}$*, pokud pro každou strukturu $R' \in \mathcal{K}$ o k prvcích, pro kterou existuje vnoření $f : R' \to R$, a každou strukturu $R'' \in \mathcal{K}$ o $k+1$ prvcích, pro kterou existuje vnoření $g : R' \to R''$, existuje vnoření $h : R'' \to R$

takové, že $f^{-1} \circ g \circ h$ je identita (tedy obraz R'' který vznikne z R' přidáním jednoho prvku R).

O R řekneme, že má *rozšiřující vlastnost*, pokud má k-rozšiřující vlastnost pro každé k.

Například graf G má k-rozšiřující vlastnost pro třídu všech spočetných grafů, pokud pro každý jeho indukovaný podgraf H o k vrcholech můžeme zvolit podmnožinu vrcholu H, A, a v $V(G) \setminus V(H)$ existuje vrchol, který je spojen se všemi vrcholy množiny A a není spojen s žádným vrcholem $V(H) \setminus A$. Graf H tedy můžeme rozšířit o jeden vrchol libovolným způsobem.

Graf má rozšiřující vlastnost, pokud libovolný jeho podgraf můžeme takto rozšířit o jeden vrchol.

Existenci grafu s rozšiřující vlastností dokazují P. Erdös a A. Rényi v roce 1963 [3] elegantním pravděpodobnostním důkazem:

Věta 2.1.1 (Erdös, Rényi [3]) *Nechť $G = (V, E)$ je spočetný graf, kde V je množina přirozených čísel a dva vrcholy jsou spojeny hranou s pravděpodobností $\frac{1}{2}$, pak s pravděpodobností 1 má graf G následující vlastnost:*

> *Pro každé konečné disjunktní množiny vrcholů A a B existuje vrchol v takový, že je spojen se všemi vrcholy z množiny A a není spojen se žádným s vrcholů z množiny B.*

Důkaz. Ukážeme, že nesplnění podmínky má pravděpodobnost 0. Stačí dokázat, že množina náhodných grafů nesplňujících podmínku pro libovolné dané množiny A a B je nulová a použijeme základní lemma z teorie míry, tedy že míra množiny skládající se ze spočetně mnoha nulových množin je nulová, a pozorování, že je jenom spočetně mnoho voleb množin A a B.

Nechť $v_1, v_2, \ldots, v_n$ jsou vrcholy různé od vrcholů v A a B. Spočítejme pravděpodobnost, že žádný z těchto vrcholů není oním hledaným vrcholem v:

Pravděpodobnost, že libovolný v_i není správně připojen, je:

$$1 - \frac{1}{2^{|A|+|B|}}$$

Protože tyto jevy jsou nezávislé, pravděpodobnost, že žádný z n vrcholů nemá hledanou vlastnost, je:

$$\left(1 - \frac{1}{2^{|A|+|B|}}\right)^n$$

Tato hodnota konverguje k 0 pro n jdoucí k nekonečnu a tak pravděpodobnost, že žádný vrchol nemá hledanou vlastnost, je 0. □

k-rozšiřující vlastnost byla také pod různými názvy studována pro částečně uspořádanou množinu $\mathcal{C}$ a ukázala se být velice zajímavou i pro malé hodnoty k. J. Nešetřil [14] podává shrnutí těchto výsledků a používá je k důkazu univerzality $\mathcal{C}$.

Definice. O třídě $\mathcal{K}$ relačních struktur řekneme, že je dědičná, pokud je uzavřená na tvorbu indukovaných podstruktur.

Pro dědičné třídy relačních struktur je rozšiřující vlastnost dané struktury silnější než požadavek univerzality nebo homogenity:

Věta 2.1.2 *Nechť $\mathcal{K}$ je dědičná třída spočetných relačních struktur. Každá struktura $R \in \mathcal{K}$ s rozšiřující vlastností pro $\mathcal{K}$ je univerzální a homogenní.*

Důkaz.
Univerzalita:

Nechť $R' \in \mathcal{K}$ zvolí nepřítel. Nejprve očíslujeme prvky R' a pak budeme postupně vytvářet indukované podstruktury R' tak, že začneme od prázdné a n-tá podstruktura vznikne z předchozí přidáním n-tého prvku R'. Pak můžeme použít rozšiřující vlastnosti R a v každém kroku najít vnoření rozšířením vnoření z kroku předcházejícího. Vnoření R' do R je pak sjednocením všech zkonstruovaných částečných vnoření.

Homogenita:

Při konstrukci automorfismu R z isomorfismu dvou jejích indukovaných podstruktur, R' a R'', použijeme známý nástroj teorie modelů „zig-zag“:

Nejprve očíslujeme prvky struktury R a pak budeme konstruovat posloupnost indukovaných podstruktur R'_i, R''_i a isomorfismů $f_i : R'_i \to R''_i$, dokud nevyčerpáme R prvky takto:

$R'_1 = R'$, $R''_1 = R''$, f_1 je isomorfismus R' a R''.

R'_{2i} je R'_{2i-1} rozšířená o nový prvek R ještě neobsažený v R'_{2i-1} s nejmenším přiřazeným číslem. Nazveme jej x. Použijeme rozšiřující vlastnosti pro nalezení prvku y tak, aby R''_{2i}, která vznikne z R''_{2i-1} rozšířením o prvek y, byla isomorfní s R'_{2i}. Isomorfismus f_{2i} bude f_{2i-1} rozšířený o zobrazení prvku x na y.

R''_{2i+1} a R'_{2i+1} vytvoříme analogicky rozšířením R''_{2i} a R'_{2i}, tentokrát ale s prohozenými rolemi R'_n a R''_n.

Z rozšiřující vlastnosti se tato konstrukce nemůže zastavit, dokud nevyčerpáme všechny prvky R, k čemuž ale musí po maximálně ω krocích dojít. Automorfismus $f : R \to R$ vznikne sjednoceným všech částečných isomorfismů f_i. $\square$

Věta 2.1.3 *Nechť $\mathcal{K}$ je dědičná třída spočetných struktur. Každé dvě relační struktury $R, R' \in \mathcal{K}$ s rozšiřující vlastností pro $\mathcal{K}$ jsou isomorfní.*

Důkaz. Opět použijeme metodu „zig-zag“:

Očíslujeme vrcholy obou struktur přirozenými čísly a budeme postupně vytvářet struktury R_i, R'_i a jejich isomorfismy f_i.

R_1 a R'_1 jsou prázdné struktury a f_1 je prázdná funkce.

Podobně jako v předchozím důkazu, R_{2i} je R_{2i-1} rozšířená o nový prvek $x \in R$ ještě neobsažený v R_{2i-1} s nejmenším přiřazeným číslem. $y \in R'$ zvolíme pomocí rozšiřující vlastnosti tak, aby R'_{2i}, která vznikne z R'_{2i-1} rozšířením o y, byla isomorfní s R_{2i}. Konečně f_i vznikne rozšířením f_{i-1} o zobrazení x na y.

Opět R_{2i+1} a R'_{2i+1} vytvoříme analogicky s prohozením rolí R a R'.

Maximálně po ω krocích dostaneme isomorfismus $R \to R'$ sjednocením všech zkonstruovaných f_i. $\square$

Věta 2.1.4 *Nechť $\mathcal{K}$ je dědičná třída spočetných struktur. Je-li relační struktura R homogenní a univerzální v $\mathcal{K}$, pak má i rozšiřující vlastnost vzhledem ke $\mathcal{K}$.*

Důkaz. Nechť R' je indukovaná podstruktura R a $R'' \in \mathcal{K}$ vznikne z R' přidáním jednoho prvku x. Pak z univerzality najdeme vnoření $f : R'' \to R$. Z homogenity můžeme najít automorfismus g zobrazující prvky $f(R')$ na R'. Obrazem nového prvku x je pak $g \circ f(x)$. $\square$

2.1.1 Radoův graf

Aplikováním na grafy víme, že existuje právě jeden spočetný graf R s rozšiřující vlastností. Navíc každý náhodný graf ve smyslu věty 2.1.1 je s ním s pravděpodobností 1 isomorfní. Samotný fakt, že náhodný proces vede po spočetně mnoha krocích k přesně předvídatelnému výsledku je překvapivý. Navíc tento náhodný graf má velice jednoduchý explicitní popis, který poprvé publikoval R. Rado [20]. My uvedeme jeho upravenou verzi:

Definice. Nechť M je spočetný model teorie množin. Vrcholy Radoova grafu R jsou množiny M a hrana z množiny a do množiny b vede právě tehdy, když $a \in b$ nebo $b \in a$.

Ověřit rozšiřující vlastnost je snadné. Nechť nepřítel zadá konečný indukovaný podgraf G Radoova grafu, množinu $A \subseteq V(G)$ a žádá rozšíření o nový vrchol x, který je spojený v grafu G právě s prvky množiny A. Z definice grafu R $A \in V(R)$ a vrchol Radoova grafu odpovídající množině A má požadované vlastnosti. Může se ale stát, že $A \in V(G)$, tedy graf G už obsahuje vrchol se stejnými vlastnostmi. Tomu ale můžeme zabránit rozšířením A o libovolnou množinu neobsaženou ve $V(G)$ a ani v žádné množině $x \in V(G)$. Tímto krokem nevytvoříme žádné nežádoucí hrany, a tak je rozšířené A obrazem x v Radoově grafu.

Vzhledem k tomu, že se jedná o popis náhodného grafu, lze očekávat, že Radoův graf je velice robustní — zůstane homogenním a univerzálním i po odebrání konečně mnoha vrcholů nebo hran, což napovídá, že je snadné zkonstruovat obdobu Radoova grafu i pro některé podtřídy třídy spočetných grafů, například pro spočetné grafy bez trojúhelníků:

Mějme daný konečný model teorie množin M; „beztrojúhelníkový Radoův" graf se skládá z množin a univerza M, pro které neexistují $x, y \in a$ takové, že $x \in y$.

Jelikož zjevně každý trojúhelník v Radoově grafu musí obsahovat vrchol, jehož reprezentace obsahuje oba sousední vrcholy, výše zmíněné pravidlo zakazuje trojúhelníky. Navíc tento graf mé stále rozšiřující vlastnost pro třídu spočetných grafů bez trojúhelníků, kterou můžeme ověřit stejným postupem, jako u Radoova grafu.

Je však známo, že třída grafů bez C_4 univerzální graf nemá (viz [2]) Ve skutečnosti otázka charakterizace všech tříd grafů z univerzálním grafem je stále otevřená, narozdíl od charakterizace všech homogenních tříd grafů, kterou ukážeme v části 2.3.

2.2 On-line reprezentace

On-line reprezentaci pro danou třídu spočetných relačních struktur $\mathcal{K}$ si lze představovat jako hru mezi Alenkou a Bořivojem. Bořivoj, hrdinný to nepřítel, si zvolí strukturu $R \in \mathcal{K}$, postupně Alence odhaluje prvky této struktury a vždy prozradí také relace k již známým prvkům. Jakmile Bořivoj takto odhalí prvek R, Alenka mu musí přiřadit prvek své struktury $O \in \mathcal{K}$ a vyhrává v případě, že na konci hry je struktura indukovaná obrazy prvků R v O shodná s R.

Je zjevné, že struktura s rozšiřující vlastností umožňuje i on-line reprezentaci. Na on-line reprezentaci lze nahlížet jako na oslabenou rozšiřující vlastnost umožňující dokazovat univerzalitu, nikoliv však homogenitu struktury:

Věta 2.2.1 ([18]) *Pro každou dědičnou třídu spočetných relačních struktur $\mathcal{K}$ se strukturou $U \in \mathcal{K}$, která má rozšiřující vlastnost pro $\mathcal{K}$, jsou následující podmínky ekvivalentní:*

1. *Každá spočetná struktura $R' \in \mathcal{K}$ je reprezentovatelná v R.*

2. *Každá konečná struktura $R' \in \mathcal{K}$ je on-line reprezentovatelná v R.*

3. Každá spočetná struktura $R' \in \mathcal{K}$ je on-line reprezentovatelná v R.

Důkaz. Zjevně 3. implikuje 1. Fakt, že 2. implikuje 3., plyne z pozorování, že v každém kroku souboje mezi Alenkou a Bořivojem je odhalená část struktury konečná a z uzavřenosti na podstruktury víme, že je on-line reprezentovatelná. Reprezentace R' vznikne sjednocením všech on-line reprezentací podstruktur odhalených Bořivojem.

1. implikuje 3.: Reprezentujme U v R a nechme Alenku hrát podle této reprezentace. Protože U má rozšiřující vlastnost, může Alenka vždy dohrát do konce. $\square$

V případě Radoova grafu není těžké najít algoritmus, který by Alence pomohl zvítězit:

Algoritmus 2.2.2 (On-line vnoření grafu)
Nechť G je libovolný spočetný graf a ordinál $t(x)$ je čas zařazení prvku $x \in P$ v pořadí daném Bořivojem. Pak přiřadíme každému prvku $x \in V(G)$ jeho reprezentaci v Radoově grafu $r(x) \in G$ takto:

$$r(x) = \{r(y); t(y) < t(x) \wedge \{y, x\} \in E(G)\} \cup \{\{t(x)\}\}$$

První část definice $r(x)$ zaručuje existenci všech potřebných hran a druhá část zaručuje jednoznačnost reprezentace prvku bez vytvoření nežádoucích hran, protože žádná reprezentace není množina obsahující ordinál.

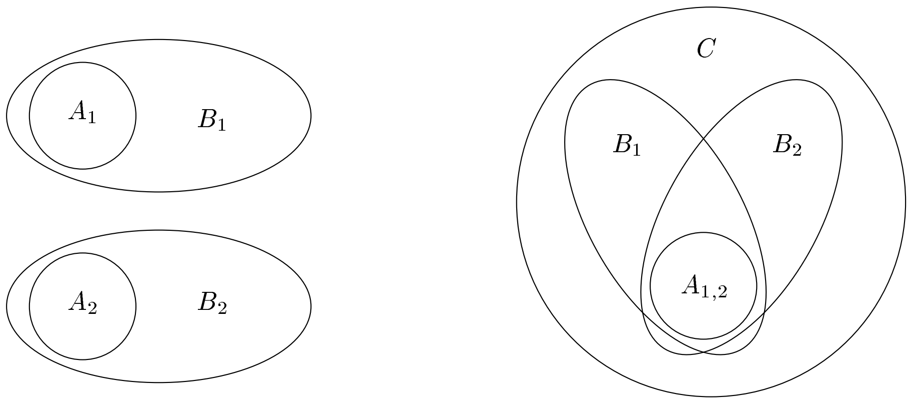
Příklady univerzálních, ale nehomogenních struktur s on-line reprezentací pro třídu všech spočetných částečně uspořádaných množin ukážeme v kapitole 4. V kapitole 3.4 ukážeme existenci univerzálního orientovaného acyklického grafu. Lze však snadno nahlédnout, že takový graf neumožňuje on-line reprezentaci:

Hrajme chvíli za Bořivoje a požádejme Alenku o reprezentaci dvou izolovaných vrcholů a a b. Nyní můžeme žádat přidání vrcholu c s hranami z a do c a z c do b, nebo orientovanými obráceně. Aby Alenka mohla vyhovět oběma našim žádostem, musela by mít ve svém grafu čtyř-cyklus, což ale není možné.

Existují tedy třídy jak s univerzální a homogenní strukturou, tak třídy pouze z univerzální strukturou, která může, nebo nemusí mít rozšiřující vlastnost. Jsou samozřejmě i třídy bez univerzální struktury.

2.3 Charakterizace homogenních struktur

Všechny homogenní struktury popsal R. Fraïssé. Základem jeho popisu je následující definice věku struktury a amalgamu:



Obrázek 2.2: Amalgam struktur B_1 a B_2

Definice. *Věkem relační struktury R* nazveme třídu všech konečných struktur stejného typu, které lze vnořit do R.

Nechť jsou dány relační struktury $B_1, B_2 \in \mathcal{K}$ a isomorfismus $f : A_1 \to A_2$, kde A_i je indukovanou podstrukturou $B_i (i = 1, 2)$, *amalgamem B_1 a B_2 podle isomorfismu f* nazveme strukturu C, kde obě podstruktury B_1 a B_2 jsou vnořeny tak, že A_1 a A_2 jsou ztotožněny podle isomorfismu f.

O třídě $\mathcal{K}$ řekneme, že má *amalgamační vlastnost*, pokud pro každé $B_1 \in \mathcal{K}$, $B_2 \in \mathcal{K}$, každé $A_i \in K, i = 1, 2$ indukované podstruktury B_i a každý isomorfismus $f : A_1 \to A_2$ existuje $C \in \mathcal{K}$, která je amalgamem B_1 a B_2 podle f.

Konstrukce amalgamu je schématicky znázorněna na obrázku 2.2.

Věta 2.3.1 (Fraïssého věta [4]) *Nechť $\mathcal{K}$ je třída všech konečných struktur daného typu. Potom $\mathcal{K}$ je věk homogenní struktury R právě tehdy, když:*

1. *$\mathcal{K}$ je uzavřená na isomorfismy.*
2. *$\mathcal{K}$ je dědičná.*
3. *$\mathcal{K}$ obsahuje pouze spočetně mnoho neisomorfních struktur.*
4. *$\mathcal{K}$ má amalgamační vlastnost.*

Pokud jsou podmínky splněny, pak je struktura R až na isomorfismus jednoznačně definována a budeme ji nazývat Fraïssého limitou.

První tři podmínky lze většinou triviálně ověřit a pouze amalgamační vlastnost je netriviální, a tak tato věta nabízí užitečný popis všech homogenních struktur.

V roce 1980 Lachlan a Woodrow použili Fraïssého teorii pro popis všech homogenních neorientovaných grafů.

Věta 2.3.2 (Lachlan a Woodrow [11]) *Každý homogenní spočetný neorientovaný graf je isomorfní s jedním z následujících grafů:*

1. *Disjunktní sjednocení m úplných grafů velikosti n, kde $m, n \leq \aleph_0$ a alespoň jedena z hodnot m nebo n je $\aleph_0$*
2. *Doplňky 1.*
3. *Fraïssého limita třídy grafů bez K_n pro dané $n \geq 3$.*
4. *Doplňky 3.*
5. *Radoův graf R.*

2.4 Ramseyovské třídy

V této části v souladu s článkem J. Nešetřila [12] zobecníme klasickou Ramseyovu větu na dědičné třídy grafů za pomoci následujícího pojmu uspořádání grafu:

Definice. Nechť $G = (V, E)$ je neorientovaný graf a $\leq$ je úplné uspořádání množiny V, potom *uspořádaným grafem* nazveme dvojici $(G, \leq)$. $\leq$ budeme také nazývat *standardním uspořádáním grafu G*.

Na uspořádané grafy můžeme nahlížet také jako na relační struktury typu $(2, 2)$. Proto budeme mluvit o vnoření, isomorfismech a indukovaných podgrafech ve stejném smyslu jako u relačních struktur. Explicitně:

Definice. Nechť G a H jsou grafy. Podobně jako v případě relačních struktur funkci $f : V(G) \to V(H)$ nazveme *vnořením G do H* právě tehdy, když je prostá a $\{x, y\} \in E(G)$ právě tehdy, když $\{f(x), f(y)\} \in E(H)$.

Nechť $(G, \leq)$ a $(H, \leq)$ jsou uspořádané grafy, potom (uspořádané) *vnoření $(G, \leq)$ do $(H, \leq)$* je bijektivní zobrazení f, které je vnořením grafu G do H a je monotónní ve smyslu standardních uspořádání. (Uspořádané) vnoření, které je na $V(H)$ nazveme isomorfismem.

Pokud pro grafy G a H $V(G) \subseteq V(H)$ a inkluze je vnoření G do H, pak G nazveme *indukovaným podgrafem H*.

Množinu všech indukovaných podgrafů H isomorfních s G budeme značit $\binom{G}{H}$. Pokud $(G, \leq)$ a $(H, \leq)$ jsou uspořádané grafy, budeme se zabývat uspořádaným vnořením a značit $\binom{G}{H}_{\leq}$.

Nechť $\mathcal{K}$ je třída grafů, $A \in \mathcal{K}$. Říkáme, že K má A-rozkladovou vlastnost, pokud pro každý graf B a pro každé standardní uspořádání A a B existuje graf C s následující vlastností:

> Pro každý rozklad $\binom{C}{A}_\leq = a_1 \cup a_2$ existuje orientovaný graf $B' = \binom{C}{B}_\leq$ tak, že $\binom{B'}{A}_\leq \subseteq a_i$, pro $i = 1$ nebo $i = 2$. $(*)$

Platnost této vlastnosti budeme značit $C \to (B)^A_2$.

Dědičnou třídu $\mathcal{K}$ s A-rozkladovou vlastností pro každé $A \in \mathcal{K}$ nazveme *Ramseyovskou třídou.*

Je třeba poznamenat, že nezáleží na tom, kolik barev volíme, a tak je volba dvou barev umělá. J. Nešetřil a V. Rödl [16] uvádí úplnou diskusi těchto faktů.

Několik příkladů Ramseyovských tříd:

- Compl — Třída všech konečných úplných grafů [21].
- Gra(k) — Třída všech grafů, které neobsahují K_{k+1} — úplný graf s $k+1$ vrcholy [16, 17].
- Eq – Třída všech ekvivalencí, tedy disjunktních sjednocení úplných grafů [12].

Podmínka Ramseyovských tříd je velice silná a je těžké zkonstruovat příklady, proto později zavedeme slabší pojem párově-Ramseyovské třídy. Další příklady Ramseyovských tříd však mohou být vytvořeny pomocí dvou konstrukcí:

1. Nechť $\mathcal{K}$ je třída grafů. Označme $\overline{\mathcal{K}}$ třídu všech doplňků $\overline{A}$ grafů $A \in \mathcal{K}$. Zjevně $\overline{\mathcal{K}}$ je Ramseyovská právě tehdy, když $\mathcal{K}$ je Ramseyovská.

   Poznamenejme, že Compl $= \overline{\mathrm{Gra}}(1)$ a že $\overline{\mathrm{Eq}}$ je třída všech Turánových grafů.

2. Přímo z definice plyne i že sjednocení dvou Ramseyovských tříd je Ramseyovská třída. Proto například třída všech grafů Gra $= \bigcup_{k\geq 1} \mathrm{Gra}(k)$ je Ramseyovská. Třídy $\mathrm{Gra}(k), \overline{\mathrm{Gra}(k)}, Eq$ a $\overline{\mathrm{Eq}}$ budeme nazývat *speciální.*

Definice. O $\mathcal{K}$ řekneme, že má *disjunktní kopie*, pokud pro každý $A \in \mathcal{K}$ existuje $B \in \mathcal{K}$ a grafy $A_1, A_2 \in \binom{B}{A}$, které jsou vrcholově disjunktní

Použijeme následující důsledek věty 2.3.2:

Věta 2.4.1 *Následující třídy a jejich sjednocení jsou jediné dědičné třídy grafů uzavřené na isomorfismy s disjunktními kopiemi a s amalgamační vlastností:*

$$\mathrm{Gra}(k), \overline{\mathrm{Gra}(k)}, \mathrm{Eq} \cap \mathrm{Gra}(k),$$

$$\overline{\mathrm{Eq}} \cap \mathrm{Gra}(k), \overline{\mathrm{Eq}} \cap \overline{\mathrm{Gra}(k)}, \mathrm{Eq} \cap \overline{\mathrm{Gra}(k)}.$$

Důkaz. Je triviální nahlédnout, že zmíněné třídy i jejich sjednocení mají požadované vlastnosti. Potřebujeme ale ukázat, že jsme vyjmenovali všechny.

Z Fraïssého věty víme, že každá spočetná dědičná třída grafů uzavřená na isomorfismy s amalgamační vlastností je věkem homogeního grafu. Ukážeme, že jsme popsali právě věky homogeních grafů 1–5 z Lachlan Woodroovy věty:

1. Pro $m = \aleph_0$ je věkem $\mathrm{Eq} \cap \mathrm{Gra}(n)$. Pro $n = \aleph_0$ je věkem $\mathrm{Eq} \cap \overline{\mathrm{Gra}(k)}$.
2. Použijeme doplňky tříd z bodu 1.
3. Věkem je $\mathrm{Gra}(k)$
4. Věkem je $\overline{\mathrm{Gra}(k)}$
5. Věkem je třída všech grafů, $\bigcup \mathrm{Gra(k)}$.

□

Definice. O dědičné třídě $\mathcal{K}$ řekneme, že je *párově-Ramseyovská*, pokud pro každé $A, B \in \mathcal{K}$ a každé dva vrcholově disjunktní grafy $A_1, A_2 \in \binom{B}{A}$ existuje $C \in \mathcal{K}$ splňující podmínku:

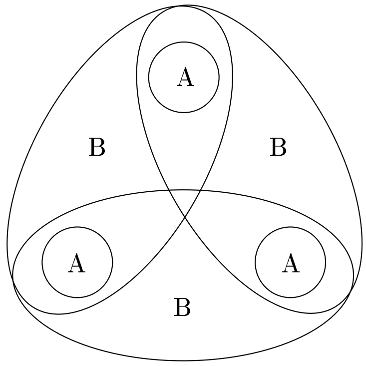
> Pro každé obarvení $\binom{C}{A} = a_1 \cup a_2$ existuje vnoření $g : B \to C$ tak, že $g(A_1) \in a_i$ právě tehdy, když $g(A_2) \in a_i$, $i = 1, 2$ ($g(A_i)$ je obraz A_i v B). $(**)$

Píšeme $C \Rightarrow B$, pokud pro každé A, každé dva vrcholově disjunktní grafy $A_1, A_2 \in \binom{B}{A}$ a každé obarvení $\binom{C}{A} = a_1 \cup a_2$ existuje vnoření $g : B \to C$ (f závisí na volbě A_1, A_2 a obarvení) tak, že $g(A_1) \in a_i$, právě tehdy, když $g(A_2) \in a_i$.

Píšeme tedy, že $C \Rightarrow B$, pokud graf C splňuje $(**)$ pro každou volbu A.

Poznamenejme, že najít příklad C pro dané A_1, A_2 a B je snadné (viz obrázek 2.3), což kontrastuje s obtížností konstrukce grafu splňujícího $(*)$, a proto je poněkud překvapující, že tyto podmínky jsou identické:

Věta 2.4.2 (J. Nešetřil [12]) *Pro dědičnou třídu grafů $\mathcal{K}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:*



Obrázek 2.3: Graf splňující (∗∗)

1. *$\mathcal{K}$ je Ramseyovská.*
2. *$\mathcal{K}$ je párově-Ramseyovská s disjunktními kopiemi*
3. *$\mathcal{K}$ je speciální*

Důkaz. $1 \implies 2$. Zafixujme vrcholově disjunktní $A_1, A_2 \in \binom{B}{A}$ a uspořádání $\leq$ grafu B tak, že A_1 a A_2 se zděděným uspořádáním $\leq$ jsou monotonně isomorfní uspořádanému grafu $(A, \leq)$. Nechť C je uspořádaný graf, kde $C \to (B)^A_2$. Potom je samozřejmě splněna i podmínka párově-Ramseyovských tříd, která je mnohem slabší.

Dokažme, že $\mathcal{K}$ má disjunktní kopie. Mějme B. Každý $C \to (B)^{K_1}_3$ obsahuje vrcholově disjunktní kopie $B_1, B_2 \in \binom{C}{B}$. (Zde je K_1 graf obsahující jeden vrchol a $C \to (B)^{K_1}_3$ značí platnost podmínky (∗) pro dělení o třech třídách a_1, a_2, a_3, což je podle [16] ekvivalentní podmínce Ramseyovskosti třídy.)

$2 \implies 3$. Nejpodstatnější je dokázat následující tvrzení:

Nechť $\mathcal{K}$ je párově-Ramseyovská dědičná třída s disjunktními kopiemi, potom $\mathcal{K}$ je sjednocení amalgamačních tříd s disjunktními kopiemi.

Důkaz:

Zafixujme $G \in \mathcal{K}$. Definujme rekurzivně grafy $G_1, G_2, \ldots,$ z $\mathcal{K}$:

$$G_1 = G$$

$$G_{i+1} \Rightarrow G_i \text{ a } G_{i+1} \text{ obsahuje disjunktní kopie } G_i, i \geq 1.$$

Nechť $\mathcal{K}_G$ je třída všech podgrafů grafů $G_i, i = 1, 2, \ldots$. Dokážeme, že K_G má amalgamační vlastnost. Nechť A, B_1, B_2 jsou grafy náležící do $\mathcal{K}_G$ a nechť $f_i : A \to B_i$ jsou daná vnoření:

Jelikož každé G_i obsahuje G_{i-1} a grafy B_1 a B_2 můžeme rozšířit, bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $B = B_1 = B_2 = G_r$ pro nějaká

$r \geq 1$. Z konstrukce $G_{r+1} = G_s$ obsahuje dvě vrcholově disjunktní kopie $B_1, B_2 \in \binom{G_s}{B}$. Nechť $\Phi_i : B \to B^i, i = 1, 2$, je isomorfismus. Nechť $A^i = \Phi_i \circ f_i(A) \in \binom{G_s}{A}$.

Konečně nechť graf $C \in \mathcal{K}_G$ splňuje $(**)$ s ohledem na G_s a A^1, A^2 (tedy $C = G_{s+1}$). Ale potom existují indukované podgrafy $G^1, G^2 \in \binom{C}{G_s}$ a isomorfismus $g_i : G_s \to G^i, i = 1, 2$ tak, že $g_1 \circ \Phi_1 \circ f_1(A) = g_2 \circ \Phi_2 \circ f_1(A)$ (jinak bychom mohli obarvit barvou 1 podgrafy C odpovídající A^1 v kopii G_s a jiné kopie A můžeme obarvit barvou 2, což porušuje $(**)$).

Potom ale podgrafy C indukované množinou $V(G^1) \cup V(G^2)$ indukují amalgamaci B_1, B_2 s ohledem na vnoření $f_1 : A \to B_1$ a $f_2 : A \to B_2$.

To dokazuje tvrzení.

Nyní 3 vyplývá z tvrzení a věty 2.4.1: víme, že $\mathcal{K}$ je sjednocení některých tříd typu $\mathrm{Gra}(k)$, $\mathrm{Eq} \cap \mathrm{Gra}(k)$, $\overline{\mathrm{Eq}} \cap \mathrm{Gra}(k)$ a jejich doplňků. Ukážeme, že $\mathcal{K}$ je sjednocení některých z tříd $\mathrm{Gra}(k)$, $\overline{\mathrm{Gra}(k)}$, Eq a $\overline{\mathrm{Eq}}$.

Pro spor předpokládejme, že například $K \supseteq \mathrm{Eq} \cup \mathrm{Gra}(k)$ pro nějaké $K > 1$ a nechť $K \not\supseteq \mathrm{Gra}(n)$ a $\mathcal{K} \not\supseteq \mathrm{Eq}$. Vezměme maximální takové k. Předpokládejme, že $\mathcal{K} \not\supseteq \overline{\mathrm{Gra}(n)}$ pro nějaké n (protože jinak $\mathcal{K} = \mathrm{Gra}$). Nechť B je disjunktní sjednocení $N > n$ úplných grafů velikosti k. Platí, že $B \in K$, a pokud $C \Rightarrow B, C \in K$, potom $C \notin \overline{\mathrm{Eq}}$ a proto $C \in \overline{\mathrm{Eq}}$. Protože $N > n$ je libovolně velké, snadno dostaneme $K \supseteq \mathrm{Eq} \cap \overline{\mathrm{Gra}(k)}$, což je spor.

Analogicky postupujeme v případě ostatních tříd, $\mathrm{Eq} \cap \overline{\mathrm{Gra}(k)}$ a doplňku.

3 $\Longrightarrow$ 1. Bylo uvedeno dříve u definice speciálních tříd. Pro důkazy Ramseyovských vlastností speciálních tříd viz [16]. ☐

Kapitola 3

Množina $\mathcal{H}$

V této kapitole se blíže zaměříme na vlastní popis univerzální částečně uspořádané množiny a zkonstruujeme novou homogenní a univerzální spočetnou částečně uspořádanou množinu $\mathcal{H}$. Narozdíl od grafů je zde situace mnohem komplikovanější, ale také zajímavější, jelikož je nutné zajistit nejen bohatost relace nad $\mathcal{H}$, ale i její tranzitivitu a antisymetrii, a tak asi není překvapivé, že definice je poněkud složitější:

Definice. Množina $\mathcal{H}$ obsahuje prvky skládající se ze tří částí A_N, A_L, A_P, kde A_N je přirozené číslo a A_L,A_P jsou disjunktní konečné podmnožiny $\mathcal{H}$ splňující:

uspořádanost: $\forall_{l \in A_L, p \in A_P} : ((\{l\} \cup l_P) \cap (\{p\} \cup p_L)) \neq \emptyset$

úplnost doleva: $\forall_{l \in A_L} : l_L \subseteq A_L$

úplnost doprava: $\forall_{p \in A_P} : p_P \subseteq A_P$

Prvky $\mathcal{H}$ zapisujeme jako $A = (\, A_L \mid A_P \,)_{A_N}$.

Množinu $\mathcal{H}$ lze konstruovat postupně od atomů $(\, \emptyset \mid \emptyset \,)_N \in \mathcal{H}$, a tudíž je neprázdná. Například můžeme zkonstruovat následující prvky $\mathcal{H}$:

$$\left.\begin{array}{c} (\, \emptyset \mid \emptyset \,)_1 \\ (\, \emptyset \mid \{(\, \emptyset \mid \emptyset \,)_1\} \,)_2 \\ (\, \{(\, \emptyset \mid \emptyset \,)_1, (\, \emptyset \mid \{(\, \emptyset \mid \emptyset \,)_1\} \,)_2\} \mid \emptyset \,)_3 \end{array}\right\} \in \mathcal{H}$$

Z konečnosti všech členů každé trojice plyne, že množina $\mathcal{H}$ je spočetná.

Definice. Pro různé prvky $\mathcal{H}$ píšeme, že $a < b$, pokud průnik množin $\{a\} \cup a_P$ a $\{b\} \cup b_L$ je neprázdný[1]. Libovolný prvek tohoto průniku nazveme

[1]Poznamenejme, že tato podmínka je identická s definicí uspořádanosti prvků $\mathcal{H}$

důkazním prvkem nerovnosti $a < b$. Píšeme, že $a \leq b$, pokud $a = b$, nebo $a < b$.

Věta 3.0.3 *$\leq$ je částečné uspořádání na množině $\mathcal{H}$.*

Důkaz věty ověřuje, že výše zmíněná pravidla jsou dostatečně silná, aby vyjádřila částečné uspořádání. Později naopak ukážeme, že jsou dostatečně obecná, aby povolila libovolné částečné uspořádání. Protože samotný důkaz je poněkud technický, nejprve intuitivní vysvětlení důvodu jednotlivých podmínek:

Pro každé $a \in \mathcal{H}$ lze množiny a_L resp. a_P považovat za seznam starších prvků, které jsou menší resp. větší než a. Definici relace $<$ lze neformálně popsat tak, že $a < b$, pokud jeden z prvků je starší a druhý jej přímo zmiňuje, nebo existuje nějaký společný starší prvek (důkazní prvek), který nerovnost vynucuje tranzitivitou.

Uspořádanost zaručuje, že prvky množiny a_L jsou ostře menší než prvky a_P, a zakazuje tak cykly. Předpoklady úplnosti jsou pouze technickou pomůckou a lze je vypustit za cenu zkomplikování definice relace $<$ a uspořádanosti.

Lemma 3.0.4 *$<$ je tranzitivní na množině $\mathcal{H}$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $a < b < c$. Potřebujeme ověřit, že $a < c$.

Nechť d_1 je důkazním prvkem nerovnosti $a < b$, d_2 důkazním prvkem nerovnosti $b < c$. Dokažme, že $d_1 \leq d_2$:

1. $d_1 \in b_L$ a $d_2 \in b_P$: z uspořádanosti víme, že $d_1 < d_2$.

2. $d_1 = b$ a $d_2 \in b_P$: Pak d_2 je důkazním prvkem nerovnosti $b < d_2$ a tedy i $d_1 < d_2$.

3. $d_1 \in b_L$ a $d_2 = b$: Obdobně d_1 je důkazním prvkem nerovnosti $d_1 < b$.

4. $d_1 = d_2 = b$: Pak b je důkazním prvkem nerovnosti $a < c$. V tomto případě je lemma dokázána.

Předpokládejme, že nastala jedna z možností 1–3, tedy $d_1 < d_2$, a nechť d_3 je důkazním prvkem této nerovnosti:

$$\begin{array}{ccccc} & & d_3 & & \\ & d_1 & < & d_2 & \\ a & < & b & < & c \end{array}$$

Ve vztahu d_3 k a opět nastává několik možností:

1. $d_3 = d_1 = a$.
2. $d_3 = d_1$ a $d_3 \in a_P$;
3. $d_3 \in d_{1P}$, pak ale i $d_3 \in a_P$ z úplnosti.

Tedy buď $d_3 = a$, nebo $d_3 \in a_P$. Obdobně $d_3 = c$, nebo $d_3 \in c_P$, a tedy d_3 je důkazním prvkem nerovnosti $a < c$. □

Důsledek. Relace $\leq$ je také tranzitivní.

Definice. *Úrovní prvku $a \in \mathcal{H}$, $l(a)$,* nazveme ordinál:

$$\sup(\{l(b), b \in a_L \cup a_P\} \cup \{0\}) + 1$$

Atomy $\mathcal{H}$ mají úroveň 1. Pokud se $a \in \mathcal{H}$ nachází někde v zápisu $b \in \mathcal{H}$, pak $l(a) < l(b)$. Tedy „starší“ prvky $\mathcal{H}$ mají nižší úroveň. Pokud d je důkazním prvkem nerovnosti $a < b$, pak $l(d) \leq l(a)$, $l(d) \leq l(b)$ a navíc platí ostrá nerovnost alespoň v jednom z případů, protože d musí být různé od alespoň jednoho z prvků a a b, a tedy $d \in a_P$ nebo $d \in b_L$.

Lemma 3.0.5 *$<$ je silně antisymetrická na množině $\mathcal{H}$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $a \neq b$ jsou protipříkladem s nejmenším součtem úrovní, $l(a) + l(b)$. Nechť d_1 je důkazním prvkem nerovnosti $a < b$ a d_2 důkazním prvkem nerovnosti $b < a$. Potom víme, že $a \leq d_1 \leq b \leq d_2 \leq a \leq d_1$. Z tranzitivity víme, že $d_1 \leq d_2$ a $d_2 \leq d_1$.

Nastávají možnosti:

1. $d_1 = d_2$: Z disjunktnosti množin a_L, a_P víme, že $d_{1,2} = a$, protože jinak musí být $d_{1,2} \in a_L$ i $d_{1,2} \in a_P$. Z disjunktnosti množin b_L, b_P víme, že $d_{1,2} = b$, což je spor.
2. $d_1 = a$ a $d_2 = b$, nebo $d_1 = b$ a $d_2 = a$: Potom $l(a) < l(b)$ i $l(b) < l(a)$, což je spor.
3. $d_1 \neq a$, $d_1 \neq b$, $d_1 \neq d_2$: Potom $l(d_1) < l(a)$ a $l(d_1) < l(b)$. Navíc $l(d_2) \leq l(a)$ a $l(d_2) \leq l(b)$. Spor plyne z toho, že d_1 a d_2 jsou protipříkladem s menším součtem úrovní.
4. $d_2 \neq a$, $d_2 \neq b$, $d_1 \neq d_2$: Obdobně jako v předchozím případě.

□

Důkaz. Tranzitivitu a antisymetrii dokazují lemmata, reflexivita plyne přímo z první části definice $\leq$. □

3.1 Homogenita $\mathcal{H}$

Věta 3.1.1 *$\mathcal{H}$ má rozšiřující vlastnost pro třídu všech spočetných částečných uspořádání.*

Důkaz. Nechť nepřítel žádá nalezení nového prvku $x \in \mathcal{H}$ tak, že zadá konečné množiny $L \subseteq \mathcal{H}$ všech prvků menších než x, $P \subseteq \mathcal{H}$ prvků větších a $N \subseteq \mathcal{H}$ prvků neporovnatelných tak, že relace $\leq$ na množině $L \cup P \cup N$ rozšířené požadovaným způsobem o x je stále částečné uspořádání. Platí tedy

1. $\forall_{l \in L} \forall_{p \in P} : l < p$
2. $\nexists_{l \in L, n \in N} : n \leq l$, $\nexists_{p \in P, n \in N} : p \leq n$.
3. L, P a N jsou navzájem disjunktní

Nechť $\overline{L} = \{a; \exists_{b \in L} : a \in b_L\} \cup L$ je doleva zúplněná L a $\overline{P}$ podobně doprava zúplněná P. Ověříme, že množiny $\overline{L}$, $\overline{P}$ a N stále splňují pravidla 1–3:

1. Nechť $l \in \overline{L}$ a $l \in \overline{P}$. Nechť $l' \in L$ je prvek, který si vynutil $l \in L$: $l' = l$, pokud $l \in L$, nebo $l \in l'_L$. Podobně $p' \in P$ je prvek, který si vynutil $p \in \overline{P}$. Platí $l \leq l' < p' \leq p$ a z tranzitivity i $l < p$.
2. Nechť $l \in \overline{L}$ a $n \in N$. Nechť l' je prvek L, který si vynutil přítomnost l v $\overline{L}$. Z podmínky 2 neplatí, že $n \leq l'$. Platí ale, že $l < l'$, a tedy neplatí ani $n \leq l$.
3. Disjunktnost $\overline{L}$ a $\overline{P}$ plyne z podmínky 1, disjunktnost N s $\overline{L} \cap \overline{P}$ z podmínky 2.

$\overline{L}$ a $\overline{P}$ jsou disjunktní a splňují uspořádanost. Díky zúplnění $(\,\overline{L} \mid \overline{P}\,)_n \in \mathcal{H}$ pro libovolné přirozené číslo n. Můžeme tedy zvolit nový prvek $a = (\,\overline{L} \mid \overline{P}\,)_n$ tak, aby a nebylo prvek N, a ověříme, že má vlastnosti požadované nepřítelem:

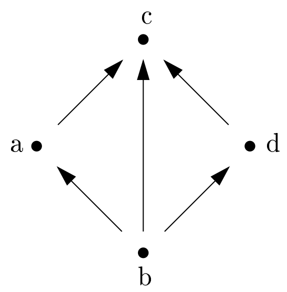
Zjevně $\forall_{l \in L} : l < a$ a $\forall_{l \in P} : a < p$.

Nechť $b \in N$. Potřebujeme ověřit, že b je neporovnatelné s a. Nechť například $b < a$ a d je důkazním prvkem nerovnosti. Potom $d \in \overline{L}$. Nechť d_1 je prvek, který si vynutil přítomnost d v $\overline{L}$. Pak $b < d \leq d_1$, což je ve sporu s podmínkou 2.

$\square$

Důsledek. $\mathcal{H}$ je univerzální a homogenní částečně uspořádaná množina.

Důkaz. Triviální aplikací věty 2.1.2. $\square$



Obrázek 3.1: Částečně uspořádaná množina P

3.2 On-line reprezentace částečně uspořádaných množin

Vraťme se ke hře popsané v sekci 2.2. Ukážeme, že Alenka se nemusí Bořivoje obávat ani v případě uspořádaných množin a může použít struktury $\mathcal{H}$ a následující algoritmus:

Algoritmus 3.2.1 (On-line vnoření částečně uspořádané množiny) *Nechť P je libovolná spočetná částečně uspořádaná množina relací $\leq_P$ a $t(x)$ je čas zařazení prvku $x \in P$ v pořadí daném nepřítelem. Pak přiřadíme každému prvku $x \in P$ jeho kód (reprezentaci) $c(x) \in \mathcal{H}$ takto:*

$$c(x) = (\,\{c(y); t(y) < t(x) \wedge y \leq_P x\} \mid \{c(y); t(y) < t(x) \wedge x \leq_P y\}\,)_{t(x)}$$

Například zanoření částečně uspořádané množiny na obrázku 3.1 v abecedním pořadí bude probíhat takto:

Bořivoj: Chci obraz a.

Alenka: $c(a) = (\,\emptyset \mid \emptyset\,)_1$.

Bořivoj: Chci obraz b tak, že platí $b < a$.

Alenka: $c(b) = (\,\emptyset \mid \{(\,\emptyset \mid \emptyset\,)_1\}\,)_2$.

Bořivoj: Chci obraz c tak, že platí $a < c$ a $b < c$.

Alenka: $c(c) = (\,\{(\,\emptyset \mid \emptyset\,)_1, (\,\emptyset \mid \{(\,\emptyset \mid \emptyset\,)_1\}\,)_2\} \mid \emptyset\,)_3$,
zkráceně $c(c) = (\,\{c(a), c(b)\} \mid \emptyset\,)_3$.

Bořivoj: Chci obraz d tak, že platí $b < d$ a $d < c$ a d je neporovnatelné s a.

Alenka: $c(d) = (\,\{(\,\emptyset \mid \{(\,\emptyset \mid \emptyset\,)_1\}\,)_2\} \mid \{(\,\{(\,\emptyset \mid \emptyset\,)_1, (\,\emptyset \mid \{(\,\emptyset \mid \emptyset\,)_1\}\,)_2\} \mid \emptyset\,)_3\}\,)_4$, zkráceně $c(d) = (\,\{c(b)\} \mid \{c(c)\}\,)_4$.

Bořivoj: Zostuzen odchází…

Věta 3.2.2 *Algoritmus 3.2.1 vnořuje množinu P do $\mathcal{H}$.*

Důkaz. Správnost algoritmu plyne z důkazu věty 3.1.1 a jednoduchého pozorování, že algoritmus používá stejnou konstrukci kódu, jaká byla použita při konstrukci a požadovaného nepřítelem. Algoritmus využívá znalosti starších kódů, a proto nemusí zúplňovat množiny L a P. □

3.3 $\mathcal{H}$ a nadreálná čísla

Podívejme se na definici Conwayových nadreálných čísel [10]:

Definice. Nadreálné číslo je dvojice $x = \{x^L | x^P\}$, kde každý prvek x^L a x^P je nadreálné číslo a navíc každý prvek x^L je ostře menší než prvek x^P.

Nadreálné číslo x je menší nebo rovno nadreálnému číslu y právě tehdy, když y není menší nebo rovno žádnému prvku x^L a žádný prvek y^P není menší nebo roven x.

Třídu všech nadreálných čísel budeme značit $\mathbb{S}$.

Už na první pohled je nápadně podobná definici $\mathcal{H}$. Abychom obě struktury ještě více přiblížili, zavedeme:

Definice. x je prvkem *omezené struktury* $\mathcal{HR}$, pokud x je prvkem $\mathcal{H}$ a $x_N = 0$.

Věta 3.3.1 *$\mathcal{HR}$ je isomorfní s $\mathcal{H}$*

Důkaz. Dokážeme, že $\mathcal{HR}$ má rozšiřující vlastnost upravením důkazu věty 3.1.1. Nechť nepřítel opět zadá množiny $L, N, P \subseteq \mathcal{HR}$ a žádá nalezení prvku x tak, že všechny prvky množiny L jsou menší než x, prvky množiny P větší a prvky množiny N neporovnatelné. Konečně nechť $a \in \mathcal{H}$ je reprezentace vytvořená postupem v důkazu věty 3.1.1.

V případě, že $a \in \mathcal{HR}$, jsme hotovi. V opačném případě $a_N \neq 0$. Potom zkonstruujeme množinu $M = \{x; \exists_{y \in L \cup P \cup N} : x \in y_P\} \cup L \cup P \cup N$ a nový prvek $b = (\,\emptyset \mid M\,)_0$. Jelikož M je doprava zúplněná $L \cup P \cup N$ a ostatní podmínky definice prvku $\mathcal{HR}$ potažmo $\mathcal{H}$ jsou splněny triviálně, je $b \in \mathcal{HR}$.

Reprezentací prvku x v $\mathcal{HR}$ potom bude $c = (\,\{b\} \cup a_L \mid a_p\,)_0$. Zjevně $c \in \mathcal{HR}$, protože b_L je prázdná množina, a tedy i c_L je doleva úplná. Protože b je nový prvek, má c stejné vlastnosti vzhledem k prvkům $L \cup P \cup N$ jako a. □

Jelikož prvky $\mathcal{HR}$ mají stejnou formu jako prvky $\mathbb{S}$, můžeme nad $\mathcal{HR}$ zavést „Conwayovu nerovnost“:

Definice. Pro prvky $x, y \in \mathcal{HR}$ píšeme, že $x \leq_{\mathbb{S}} y$, pokud neexistuje $l \in x_L$, $y \leq_{\mathbb{S}} l$ a neexistuje $r \in y_R$, $r \leq_{\mathbb{S}} x$.

Věta 3.3.2 *Nechť $x, y \in \mathcal{HR}$. Pokud $x < y$, pak i $x <_{\mathbb{S}} y$*

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí podle $l(x) + l(y)$:

Pro prázdné x a y věta platí (jsou neporovnatelné pomocí $<$).

Nechť $x < y$ a d je důkazní prvek nerovnosti. Pokud $d \neq x, y$, pak $x <_{\mathbb{S}} d <_{\mathbb{S}} y$ z indukčního předpokladu. Předpokládejme, že $x \in y_L$. Potom $x <_{\mathbb{S}} y$ z uspořádanosti a definice $<_{\mathbb{S}}$. □

Důsledek. $\mathcal{HR}$ je podtřídou nadreálných čísel a $<_{\mathbb{S}}$ je lineární kvaziuspořádání nad $\mathcal{HR}$. Navíc relace $\leq$ je podmnožinou relace $<_{\mathbb{S}}$.

3.4 $\mathcal{H}$ a acyklické orientované grafy

Jak jsme slíbili v kapitole o on-line reprezentacích (2.2), upravíme $\mathcal{H}$ na spočetný acyklický orientovaný graf D univerzální pro třídu všech spočetných univerzálních grafů:

Definice. Prvky $V(D)$ jsou dvojice $A = (A_H, A_M)$, kde $A_H \in \mathcal{H}$ a A_M je konečná podmnožina $\mathcal{H}$.

$(A, B) \in E(D)$, pokud $A, B \in V(D)$ a zároveň $A_H < B_H$, $A_H \notin B_M$ a $B_H \notin A_M$.

Věta 3.4.1 *Graf D je univerzální pro třídu všech spočetných acyklických orientovaných grafů.*

Důkaz. Graf D je zjevně spočetný a také acyklický, jelikož jeho hrany lze vnořit do částečně uspořádané množiny $\mathcal{H}$

Pokud chceme on-line reprezentovat libovolný spočetný acyklický orientovaný graf G a máme-li dostatečně přátelského nepřítele, snadno jej přesvědčíme, aby svůj graf G doplnil na částečně uspořádanou množinu P a v každém kroku nám prozradil informaci také o nově doplněných hranách. Potom snadno vnoříme P do $\mathcal{H}$ a obraz $O \in V(D)$ vrcholu G vytvoříme tak, že O_H bude reprezentace odpovídajícího prvku P v $\mathcal{H}$ a O_M bude seznam hran chybějících v grafu G oproti R. □

Graf D není ani homogenní, ani neumožňuje on-line reprezentovatelnost. Jak ale bylo ukázáno v kapitole 2.2, tyto vlastnosti nemůžeme žádat.

Kapitola 4

Ostatní částečně uspořádané množiny

V této kapitole ukážeme několik příkladů alternativních popisů univerzální částečně uspořádané množiny.

4.1 $\mathcal{H}$ a multiřezy

První budou multiřezy popsané J. Nešetřilem [13] jako příklad jednoduché univerzální a nehomogenní struktury, které nám poslouží jako užitečný krok od $\mathcal{H}$ ke známějším strukturám.

Definice. Nechť $M = \{A_\iota; \iota \in I\}$ je množina množin ordinálů. M nazveme *pointed množinou*, pokud:

1. Každá množina A_λ má maximální prvek.
2. Pro různé množiny jsou maxima různá
3. Pokud $\max A_\lambda \in A_\iota$, potom $A_\lambda \subseteq A_\iota$

Multiřez je množina neprázdných pointed množin.

Pro multiřezy C a C' píšeme, že $C \leq_{\mathcal{MC}} C'$, pokud pro každou množinu $A' \in C'$ existuje $A \in C$, $A \subseteq A'$.

Definice umožňuje konstrukci transfinitně mnoha multiřezů. Jelikož se v této práci zabýváme spočetnými částečně uspořádanými množinami, omezíme se na konečné množiny a ordinály odpovídající přirozeným číslům.

Je zjevné, že $\leq_{\mathcal{MC}}$ je kvaziuspořádání. Třídu všech multiřezů reprezentující danou třídu ekvivalence $\leq_{\mathcal{MC}}$ budeme značit $\mathcal{MC}$.

Narozdíl od původního článku, který dokazuje univerzalitu multiřezů přímo, uvedeme zde jednoduchý převod prvků $\mathcal{H}$ na multiřezy, který lépe objasní, jak spolu obě struktury souvisí.

Algoritmus 4.1.1 (On-line vnoření $\mathcal{H}$ do multiřezů)
Nechť $n(a)$ přiděluje každému prvku $\mathcal{H}$ jednoznačné přirozené číslo, například aritmetizací množinového zápisu a.

Pro každý prvek $a \in H$ pointed množinu $\{n(x); x \in a_L\} \cup \{n(a)\}$ nazveme $l(a)$ a multiřez $\{l(x); x \in a_P\} \cup \{l(a)\}$ nazveme $m(a)$. $m(a)$ je pak obrazem prvku a v třídě $\mathcal{MC}$.

Vraťme se k částečně uspořádané množině na obrázku 3.1 a její reprezentaci v $\mathcal{H}$. Převod do multiřezů může vypadat takto:

$$\begin{array}{rclrcl} n(c(a)) & = & 0, & m(c(a)) & = & \{\{1\}\} \\ n(c(b)) & = & 1, & m(c(b)) & = & \{\{1\},\{2\}\} \\ n(c(c)) & = & 2, & m(c(c)) & = & \{\{1,2,3\}\} \\ n(c(d)) & = & 3, & m(c(d)) & = & \{\{2,4\},\{1,2,3\}\} \end{array}$$

Věta 4.1.2 *$m(a)$ zobrazuje $\mathcal{H}$ do $\mathcal{MC}$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $a \leq b$. Potom z konstrukce $m(b)$ pro každé $x \in m(b)$ existuje $y = p^{-1}(x)$ a platí $a \leq y$. Nechť d je důkazním prvkem. Potom z úplnosti doleva $l(d) \subseteq x$ a $l(d) \in m(a)$, což stačí k ověření nerovnosti $m(a) \leq_{\mathcal{MC}} m(b)$.

Předpokládejme, že $m(a) \leq_{\mathcal{MC}} m(b)$. Potom z definice $\leq_{\mathcal{MC}}$ existuje $x \in m(a)$, $x \subseteq l(b)$ a $d = p^{-1}(x)$ je důkazním prvkem nerovnosti $a \leq b$.

□

Poznámka. Z definice $m(a)$ je zřejmé, že každá zkonstruovaná pointed množina obsahuje pouze ordinály. Definici multiřezu lze tedy zjednodušit na „množinu pointed množin ordinálů“.

Poznámka. Z definice $m(a)$ lze jednoduše zkonstruovat formule vydělující homogenní podmnožinu $\mathcal{MC}$.

Podívejme se na konstrukci vnoření $\mathcal{H}$ do multiřezů z pohledu nově definovaných operací:

Definice. Nechť S je libovolná množina částečně uspořádaná relací $<_S$. Potom operaci $\times$ nazveme operací násobení vzhledem k S, pokud pro všechna $a, b \in S$, je $a \times b \in S$ a pro všechna $c \in S$ $a \times b <_S c$ právě tehdy, když $a <_S c$ nebo $b <_S c$.

Operaci $\times$ nazveme striktní na množině $M \subset S$, pokud pro $a, b, c \in M$ $c <_S a \times b$ právě tehdy, když $c <_S a$ a $c <_S b$.

Operaci $+$ nazveme operací sumy vzhledem k S, pokud pro všechna $a, b \in S$ je $a + b \in S$ a pro všechna $c \in S$ $c <_S a + b$ právě tehdy, když $c <_S a$ nebo $c <_S b$.

Operaci $+$ nazveme striktní na množině $M \subset S$, pokud pro $a, b, c \in M$ $a + b <_S c$ právě tehdy, když $a <_S c$ a $b <_S c$.

Narozdíl od $\mathcal{H}$ se multiřezy se skládají ze dvou vrstev — první vrstvu tvoří množiny a uspořádání pomocí $\subseteq$, které samy o sobě postačí pro reprezentaci libovolné konečné částečně uspořádané množiny, nejsou však univerzální, protože neumožňují neomezené vkládání prvků menších, než jsou již reprezentované. Vytváření prvků větších než již existující prvky lze provádět sjednocováním množin, které funguje jako operace sumy.

Obecně sice neplatí, že pokud $a \subseteq b \cup c$, pak i $a \subseteq b$ nebo $a \subseteq c$, ale konstrukce tuto vlastnost zajistí přidáním nového identifikátoru do každé vytvořené množiny. Můžeme také požadovat, aby největší prvek množiny jednoznačně kódoval ostatní, a tím zajistíme jednoznačné identifikátory globálně. Sjednocování (spolu s přidáním nového maxima) se pak chová jako operace striktní sumy na všech množinách vytvořených algoritmem, což pro naše potřeby postačuje.

Druhá vrstva přidává operaci násobení:

Definice. Nechť A, B jsou multiřezy, potom $A \times B$ je multiřez $A \cup B$.

Opět operace $\times$ se chová jako striktní operace násobení pouze pro prvky vytvořené algoritmem.

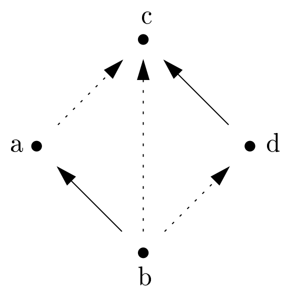
Pro libovolný prvek $p \in P$ označme p_p množinu všech prvků starších a menších než p a p_l množinu všech prvku starších a větších než p. V novém názvosloví lze přepsat konstrukci na:

$$m(x) = \prod_{p \in x_p \cup x} \{ \sum_{l \in p_l \cup p} \{n(l)\}\}$$

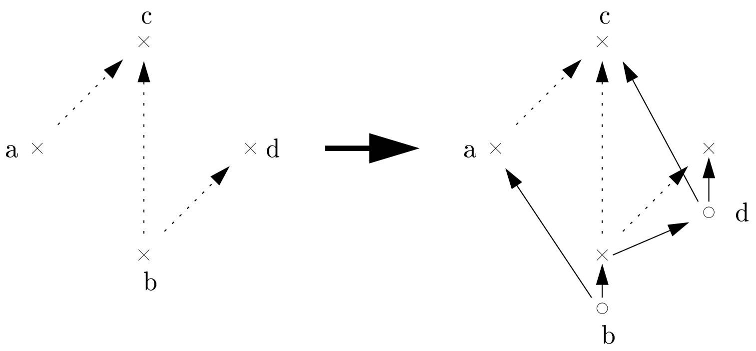
Čas zařazení prvků si lze také představit jako speciální obarvení hran částečně uspořádané množiny P — že šipky vedoucí od starší množiny do novější jsou červené a ostatní modré. Na obrázku 4.1 je obarvení částečně uspořádané množiny, kde prvky jsou zařazovány v abecedním pořadí. Červené hrany jsou nakresleny čárkovaně a modré plnou čarou.

Vnitřní část výrazu:

$$\{ \sum_{l \in x_l \cup x} \{n(l)\}\}$$



Obrázek 4.1: Obarvená částečně uspořádaná množina P



Obrázek 4.2: Dvojúrovňová reprezentace P

reprezentuje právě červenou částečně uspořádanou podmnožinu P. Vnější výraz potom vytváří nové vrcholy na cestě „pod“ již existujícími tak, aby přidal červené hrany. Na obrázku 4.2 je zobrazen efekt druhé části výrazu nad již existující červenou podstrukturou.

Tato konstrukce se podstatně odlišuje od konstrukce pro $\mathcal{H}$, kde jsme dělali obě operace jakoby „dohromady“, a je pro ni podstatné právě to, že vždy umíme reprezentovat x ve struktuře nižší úrovně. Proto je možné zahrnout nový prvek do operací.

Konstrukce podává návod, jak dokazovat univerzalitu struktury — nejprve se pokusit najít obraz $\mathcal{SET}$ (struktura všech množin uspořádaná $\subseteq$) a potom nadefinovat operaci násobení striktního pro uzávěr množiny všech výsledků operace sumy nad reprezentacemi prvků uzavřenými pro operaci násobení.

Právě toto schéma se bude opakovat i v dalších konstrukcích, v některých situacích však v obráceném pořadí:

$$m(x) = \sum_{l \in x_l \cup x} \{ \prod_{p \in l_p \cup l} \{n(p)\}\}$$

V tomto případě budeme nejprve hledat obraz $\mathcal{SET}^{\mathcal{OP}}$ (struktura všech množin uspořádaná $\supseteq$) a potom definovat operaci sumy.

4.2 Reprezentace ořezanými vektory

V této kapitole zavedeme další univerzální částečně uspořádanou množinu užitečnou pro pozdější důkaz univerzality orientovaných cest.

Definice. Nechť $\mathcal{TV}$ je množina všech konečných množin vektorů[1] konečné velikosti a nechť $|\vec{v}|$ značí počet členů vektoru $\vec{v}$.

Pro vektory $\vec{x}, \vec{y}$ píšeme, že $\vec{x} \leq_{\mathcal{TV}} \vec{y}$, pokud $|\vec{x}| \geq |\vec{y}|$ a pro všechna $i \leq |\vec{y}|$ $x_i \geq y_i$.

Pro $X, Y \in \mathcal{TV}$ píšeme, že $X \leq_{\mathcal{TV}} Y$, pokud $\forall_{\vec{x} \in X} \exists_{\vec{y} \in Y} : \vec{x} \leq_{\mathcal{TV}} \vec{y}$.

Fakt, že $\mathcal{TV}$ je částečně uspořádaná relací $\leq_{\mathcal{TV}}$, plyne z důkazu lemmatu 4.3.3, ale lze jej snadno ověřit přímo z definice.

Univerzalitu opět ověříme algoritmem pro Alenku:

Algoritmus 4.2.1 (vnoření částečně uspořádané množiny do $\mathcal{TV}$)
Nechť P je libovolná částečně uspořádaná množina relací $\leq_P$ a $t(x)$ je čas zařazení prvku $x \in P$ v pořadí daném nepřítelem. Potom $v(x)$ je $t(x)$ členný vektor obsahující na i-tém místě 1, pokud $x \leq_P t^{-1}(i)$, v opačném případě 0.

Kód prvku x, $\Theta(x)$, je množina $\{v(y); t(y) \leq t(x), y \leq_P x\}$.

Opět ukážeme zanoření částečně uspořádané množiny z obrázku 3.1:

$$\begin{array}{lcllcl}
v(a) & = & (1), & \Theta(a) & = & \{(1)\} \\
v(b) & = & (1,1), & \Theta(b) & = & \{(1,1)\} \\
v(c) & = & (0,0,1), & \Theta(c) & = & \{(1),(1,1),(0,0,1)\} \\
v(d) & = & (0,0,1,1), & \Theta(d) & = & \{(1,1),(0,0,1,1)\}
\end{array}$$

Lemma 4.2.2 *Pro x a y prvky P platí, že $\Theta(x) \leq_{\mathcal{TV}} \Theta(y)$ právě tehdy, když $x <_P y$.*

[1] Pro naše potřeby postačí vektory hodnot 0 a 1, ale je možné uvažovat o vektorech reálných čísel či jiných lineárně uspořádaných prvků.

Důkaz.

$x \leq_P y$:

Pro vektory $v(z)$, $v(z) \in \Theta(x)$, $t(z) > t(y)$ platí nerovnost $v(z) \leq_{\mathcal{TV}} v(y)$: Protože $t(z) > t(y)$, první část podmínky ($|v(z)| > |v(y)|$) je splněna. Pokud má $v(y)$ na i-tém místě 1, pak má i $v(z)$, jelikož z definice funkce v platí, že $y \leq_P t^{-1}(i)$ a tedy i $x \leq_P t^{-1}(i)$, a je tedy splněna i druhá část.

Pro $v(z) \in \Theta(x)$, $t(z) \leq t(y)$ platí $v(z) \in \Theta(y)$, protože $z \leq_P y$. Tedy $\Theta(x) \leq_{\mathcal{TV}} \Theta(y)$.

$\Theta(x) \leq_{\mathcal{TV}} \Theta(y)$:

Musí existovat z, $v(z) \in \Theta(y)$ takové, že $v(x) \leq_{\mathcal{TV}} v(z)$. Vektor $v(z)$ má na $t(z)$-té pozici 1 a tedy i $v(x)$ musí mít 1. Z definice v platí $x \leq_P z$. Z definice Θ platí $z \leq_P y$ a tedy i $x \leq_P y$. □

$\mathcal{TV}$ je příkladem struktury, která používá obrácené pořadí operací než $\mathcal{MC}$. Vektory umožňují snadnou operaci násobení. Operace sumy je reprezentována sjednocováním vektorů do množin. $\mathcal{TV}$ má podobně jako $\mathcal{MC}$ dvouvrstvou strukturu a jedná se o jakousi duální verzi $\mathcal{MC}$:

Definice. Nechť M je množina ordinálů, potom ořezaný vektor reprezentující M, $o(M)$, má délku $\max_{m \in M} m + 1$. Vektor obsahuje na n-té pozici 0, pokud $n - 1 \in M$. V opačném případě obsahuje 1.

Nechť N je multiřez. Potom $\mathcal{TV}$ reprezentací N, r(N), je množina všech ořezaných vektorů reprezentující podmnožiny N.

Z definice ořezaných vektorů je patrné, že pokud M a N jsou množiny ordinálů, $M \subseteq N$ právě tehdy, když $o(M) >_{\mathcal{TV}} o(N)$. Podobně pokud O a P jsou multiřezy, potom $O <_{\mathcal{TV}} P$ právě tehdy, když $p(O) >_{\mathcal{MC}} p(P)$.

4.3 Univerzalita $\mathcal{C}_{C^*}$

Známou univerzální částečně uspořádanou strukturou je $\mathcal{C}$ popsané v kapitole 1. Tento netriviální fakt dokázál Z. Hedrlín [7] při studiu vnořování kategorií. Později J. Nešetřil [14] publikoval zjednodušený důkaz založený na studiu rozšiřujících vlastností $\mathcal{C}$. Zde uvedeme nový, jak autor doufá, ještě jednodušší důkaz silnějšího tvrzení o univerzalitě $\mathcal{C}$ omezeného na jednu z nejjednodušších tříd grafů — na orientované cesty.

Množinu všech konečných orientovaných cest budeme značit C a množinu všech grafů skládajících se z disjunktních sjednocení orientovaných cest C^*. Nejprve dokážeme univerzalitu $\mathcal{C}$ zúženého na C^*, $\mathcal{C}_{C^*}$, a později i $\mathcal{C}$ zúženého na C, $\mathcal{C}_C$.

Podle návodu poskytnutého v minulé části vnoříme jednu ze struktur $\mathcal{MC}$ nebo $\mathcal{TV}$ do C_{C^*} nalezením striktních operací násobení a sumy. Pro naše účely je vhodnější $\mathcal{TV}$, jelikož operace sumy je na orientovaných cestách trivialně proveditelná disjuntním sjednocením. Zbývá najít algoritmus pro konstrukci cest umožňující operaci násobení. To nám zaručí speciální cesty, kterým budeme říkat stonožky:

Algoritmus 4.3.1 (vnoření částečně uspořádané množiny do $\mathcal{C}_{C^*}$) *Nechť P je libovolná částečně uspořádaná množina a $t(x)$ je čas zařazení prvku $x \in P$ v pořadí daném nepřítelem.*

Obraz prvku x, graf $\psi(x) \in C_{C^*}$, dostaneme takto:

1. *Spočítáme $v(x)$ stejně jako v algoritmu 4.2.1.*

2. *Vytvoříme stonožku $s(x) \in C$ z grafů na obrázcích 4.3 až 4.6: Stonožka vznikne postupným spojením H, $|v(x)|$ grafů C_0 resp. C_1, pokud $v(x)$ má na odpovídající pozici 0 resp. 1, a Z odleva doprava.*

3. *Kód prvku x, graf $\psi(x)$, je pak*

$$\sum_{y \in P, t(y) \leq t(x)} s(y)$$

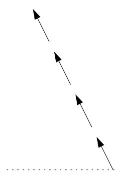
.

Stonožka pro vektor (0,1) je na obrázku 4.7.

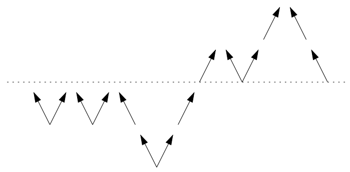
Lemma 4.3.2 *Pro každé $x, y \in P$, $s(x) \to s(y)$ právě tehdy, když $v(x) < v(y)$.*

Důkaz. Jak bylo diskutováno v sekci 1.1, libovolný homomorfismus cest zachovává absolutní hodnoty algebraických vzdáleností vrcholů, pokud jsou cesty nakresleny tak, že všechny šipky ukazují nahoru.

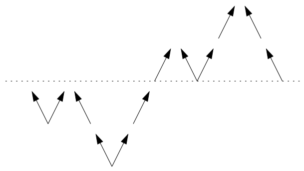
Libovolný homomorfismus dvou stonožek $s(x)$ a $s(y)$ musí zobrazit hlavičku na hlavičku, protože nikde jinde není pět šipek stejným směrem vzniklých spojením hlavičky a prvního článku. Podobně se pak musí zobrazit nejnižší vrchol prvního článku $s(x)$ na nejnižší vrchol prvního článku $s(y)$, protože žádný jiný vrchol na stejné úrovni se nenachází dostatečně blízko hlavičce. Pak se zobrazí i nejvyšší vrchol prvního článku na nejvyšší vrchol, protože se homorfismus nemůže vrátit zpět na hlavičku, a stejně tak pro další články, dokud nedosáhne zadečku $s(y)$, který může pohltit zbývající články $s(x)$. Pro $n < |v(y)|$ se tedy n-tý článek x zobrazuje na n-tý článek y.



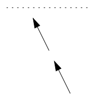
Obrázek 4.3: Hlavička H



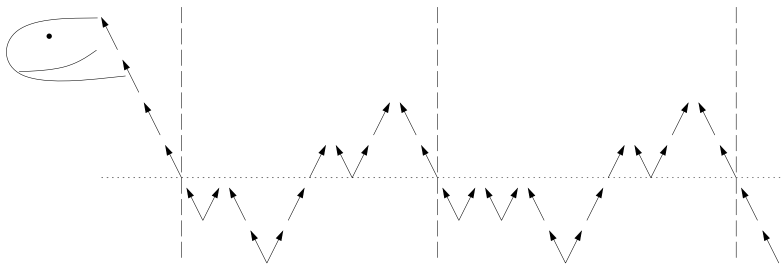
Obrázek 4.4: Velký článek C_1



Obrázek 4.5: Malý článkek C_0



Obrázek 4.6: Zadeček Z



Obrázek 4.7: Stonožka pro vektor $(0, 1)$

Stonožka $s(x)$ musí mít alespoň tolik článků jako $s(y)$, protože nikde jinde v $s(y)$ se nenacházejí oba extrémy dostatečně blízko sebe, aby na ně šel zobrazit zadeček $s(x)$. První část definice nerovnosti $\leq_{\mathcal{TV}}$, $|v(x)| > |v(y)|$, je tedy splněna.

Navíc platí, že $C_1 \to C_0$, ale neplatí, že $C_0 \to C_1$ při zafixování prvního vrcholu. Pokud tedy vektor $v(x)$ obsahuje na některém místě 0, pak i vektor $v(y)$ ji musí obsahovat, což je druhá část definice relace $\leq_{\mathcal{TV}}$.

$\square$

Věta 4.3.3 *$\psi(x) \to \psi(y)$ právě tehdy, když $x <_P y$.*

Důkaz. Věta plyne triviálně z lemmatu a faktu, že každá stonožka $\psi(x)$ se musí zobrazit na jednu ze stonožek $\psi(y)$, stejně jako vektory v definici $\Theta(x)$ a $<_{\mathcal{TV}}$. $\square$

4.4 Univerzalita $\mathcal{C}_C$

Věta 4.4.1 *Třída všech konečných orientovaných cest $\mathcal{C}_C$ je univerzální pro třídu všech spočetných částečně uspořádaných množin.*

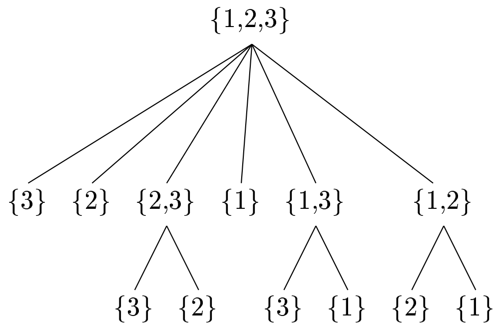
Naše konstrukce bude spojovat cesty přiřazené každému vrcholu funkcí ψ použité v minulé části do jedné velké cesty tak, aby potřebné homomorfismy byly zachovány.

Protože pro $x < y$ se stonožky $\psi(x)$ zobrazují do libovolné podmnožiny stonožek $\psi(y)$ a homomorfismy cest neumožňují žádné přeskakování, je naše situace poněkud komplikovaná. Naším cílem je representovat všechny možné podmnožiny stonožek v cestě za sebou. K tomu použijeme pomocnou strukturu, podmnožinový strom:

Definice. Nechť M je neprázdná množina přirozených čísel. *Podmnožinovým stromem* M nazveme pěstovaný strom s označením vrcholů pomocí podmnožin M, definovaný rekurzivně takto:

1. Pokud $|M| = 1$, pak se strom skládá z jediného listu označeného množinou M.

2. Pokud $|M| > 1$, pak je kořen stromu označený množinou M a má $2^{|M|} - 2$ potomků. Pro každé přirozené číslo $x \in M$ nechť $p(x)$ je pořadové číslo x v množině M uspořádané od největšího k nejmenšímu. Potom n-tý potomek r je podmnožinový strom množiny $\{x; x \in M, (n \bmod 2^{p(x)}) > 2^{p(x)-1}\}$.



Obrázek 4.8: Podmnožinový strom množiny {1,2,3}

Na obrázku 4.8 je podmnožinový strom množiny $\{1, 2, 3\}$. Zvídavý čtenář si také zajisté všiml, že komplikovaný výraz v bodu 2 je pouhým vyjádřením $p(x)$-té cifry binárního zápisu n.

Podmnožinový strom obsahuje rekurzivně všechny podmnožiny v pevně daném pořadí a pro libovolné $N \subseteq M$ je podmnožinový strom N podstromem M.

Další komplikací je ale fakt, že pokud $x < y$ a x je starší, $\psi(x)$ může obsahovat stonožky, které nejsou přímo v $\psi(y)$. Platí ale, že všechny nové stonožky lze zobrazit do $s(y)$. Tomu odpovídající operaci na podmnožinových stromech nazveme kolapsem:

Definice. Nechť n je přirozené číslo. *Kolapsem podmnožinového stromu podle n* nazveme pěstovaný strom, kde aplikujeme následující transformace:

1. V každém označení každého vrcholu nahradíme čísla větší než n číslem n.

2. Jsou-li označení dvou sousedních potomků shodná, vynecháme druhého z potomků.

3. Má-li vrchol označení $\{n\}$, vynecháme všechny jeho potomky.

Lemma 4.4.2 *Kolapsem podmožinového stromu množiny M podle n je podmnožinový strom M v případě, že $\forall_{x \in M} x < n$, nebo podmnožinový strom $\{x; x \in M, x < n\} \cup \{n\}$.*

Důkaz. Pro $|M| = 1$ plyne lemma triviálně z definice kolapsu. Podobně lemma platí triviálně pokud M neobsahuje žádné prvky větší než n.

Nechť tedy $|M| > 1$ a M obsahuje alespoň jeden prvek větší než n. Navíc předpokládejme, že lemma platí pro všechny množiny menší než M. Z definice a předpokladů plyne, že všechny potomci kořene stromu jsou podmnožinové stromy. Zbývá ověřit, že kořen má po kolapsu právě ty potomky, jaké by měl, kdyby byl konstruován pro množinu $N = \{x; x \in M, x < n\} \cup n$.

Nechť $O = \{x; x \in M, x < n\}$ a $m = \max_{x \in M} x$. Rozdělme si potomky do tří typů.

1. Potomci označení množinou P, kde $P \subseteq O$.

2. Potomci označení množinou P, kde $m \in P$ a $P \subseteq O \cup \{m\}$.

3. Potomci nesplňující podmínky typu 1 ani 2.

Podle definice podmnožinového stromu jsou potomci typu 3 vždy za potomkem typu 2 nebo 3, jejichž označení se liší pouze prvky většími nebo rovny n, proto podle definice kolapsu budou jejich množiny identické po provedení prvního kroku a v druhém kroku budou zrušeny. Ve výsledném pořadí se tedy budou střídat potomci typu 1 a 2. Dále u potomků typu 2 bude m nahrazeno n, což je pořadí shodné jako pořadí pro množinu N. $\square$

Nyní jsme už připraveni k vlastnímu důkazu věty 4.4.1:

Důkaz. Každému prvku $x \in P$ přiřadíme stonožku $s(x)$ stejně jako v minulé konstrukci. Potom vytvoříme množinu $M(x) = \{t(y); y \leq_P x, t(y) \leq t(x)\}$ a postavíme podmnožinový strom $M(x)$. Nyní každému vrcholu přiřadíme orientovanou cestu rekurzivně takto:

1. Listy s označením y dostanou cestu $s(t^{-1}(y))$ spojenou se stejnou cestou v obráceném pořadí. Připomeňme, že cestu vzniklou obrácením cesty x značíme $\overleftarrow{x}$, a proto cestu přiřazenou listu můžeme zapsat jako $s(t^{-1}(y))\overleftarrow{s(t^{-1}(y))}$.

2. Pro nelistové vrcholy nechť p je cesta vzniklá spojením cest potomků odleva doprava. Vrcholu pak přiřadíme cestu $p\overleftarrow{p}$.

Konečně nechť $\varphi(x)$ je pak cesta přiřazená kořenu stromu.

Například pro podmnožinový strom z obrázku 4.8 vytvoříme cestu spojením stonožek s daným časem takto:

$$\Big((3\overleftarrow{3})\ (2\overleftarrow{2})\ \Big((3\overleftarrow{3})\ (2\overleftarrow{2})\ (2\overleftarrow{2})\ (3\overleftarrow{3})\Big)\ (1\overleftarrow{1})\ \Big((3\overleftarrow{3})\ (1\overleftarrow{1})\ (1\overleftarrow{1})\ (3\overleftarrow{3})\Big)\ \Big((2\overleftarrow{2})\ (1\overleftarrow{1})\ (1\overleftarrow{1})\ (2\overleftarrow{2})\Big)\ \Big((2\overleftarrow{2})\ (1\overleftarrow{1})\ (1\overleftarrow{1})\ (2\overleftarrow{2})\Big)\ \Big((3\overleftarrow{3})\ (1\overleftarrow{1})\ (1\overleftarrow{1})\ (3\overleftarrow{3})\Big)\ (1\overleftarrow{1})\ \Big((3\overleftarrow{3})\ (2\overleftarrow{2})\ (2\overleftarrow{2})\ (3\overleftarrow{3})\Big)\ (2\overleftarrow{2})\ (3\overleftarrow{3})\Big)$$

Jelikož se hlavičky stonožek stále musí zobrazovat na hlavičky stonožek a protože $\varphi(x)$ obsahuje stejné stonožky jako $\psi(x)$, platí, že pokud $\varphi(x) \to \varphi(y)$, pak i $x < y$.

V opačném směru nechť $x < y$. Potom pokud x je starší než y, je $M(x) \subseteq M(y)$ a tedy podmnožinový strom $M(x)$ je podstromem $M(y)$ a z konstrukce φ je jasné, že i $\varphi(x)$ je podcestou $\varphi(y)$.

Předpokládejme, že y je starší. Nechť $M_s = \{a; a \in M(x), a \leq t(y)\}$ a $M_n = \{a; a \in M(x), a > t(y)\}$. Kolapsem podmnožinového stromu $M(x)$ podle $t(y)$ je podmnožinový strom $M_s \cup \{t(y)\}$. Cesta přidělená tomuto stromu je podcestou $\varphi(x)$ a my ověříme, že jednotlivé operace kolapsu lze provádět i při konstrukci homomorfismu do této cesty:

První pravidlo odpovídá faktu, že pro všechna $a \in M_s$ $s(t^{-1}(a)) \to s(y)$, plynoucímu z konstrukce stonožek.

Druhé pravidlo, spojující dva shodné sousedy, odpovídá vracení se v homomorfismu. Pokud kolaps zrušil následníka některého vrcholu, při procházení cesty využijeme obrácenou kopii k návratu zpět na začátek. Cestu $c\overleftarrow{c}c\overleftarrow{c}$ zobrazíme do $c\overleftarrow{c}$.

Třetí pravidlo má podobný efekt jako druhé pravidlo. Tentokrát ale obráceně. Cestu $t(y)\overleftarrow{t(y)}t(y)\overleftarrow{t(y)}$ zobrazíme do cesty $t(y)\overleftarrow{t(y)}$.

□

Důsledek. $\mathcal{C}$ omezené na třídu všech vyvážených cest výšky 4 je univerzální pro třídu všech spočetných univerzálních množin.

Důkaz. Použijeme indikátor z obrázku 1.4 □

Důsledek. Třída všech konečných roviných 3 barevných grafů stupně maximálně 3 bez trojúhelníků uspořádaná grafovými homomorfismy je univerzální pro třídu všech spočetných univerzálních množin.

Důkaz. Použijeme indikátor z obrázku 1.3 □

Věta a její důsledky nabízejí velice dobrou charakterizaci tříd grafů, které uspořádané operací $\to$ tvoří univerzální množinu. Ve větě 1.1.3 ukazujeme, že struktura $\mathcal{C}$ omezená na třídu cest výšky 3 je lineárně uspořádaná. Podobně A. M. H. Gerards [5] ukazuje, že duší spočetného grafu bez dělení K_4 je hrana, nebo lichá kružnice. Připomeňme, že rovinné grafy neobsahují dělení K_5. Žádnou z podmínek tedy nelze zúžit.

Kapitola 5

Závěr

Při práci jsme se nejprve zabývali Ramseyovskými vlastnostmi, ale později se nám podařilo dosáhnout pokroku v konstrukci samotných univerzálních množin. Hlavním přínosem práce je popis univerzální a homogenní částečně uspořádané množiny $\mathcal{H}$ v kapitole 3. Dále pak popis nové univerzální částečně uspořádané množiny $\mathcal{TV}$, která se ukázala jako vhodný mezistupeň k uzavření otázky o univerzalitě třídy všech konečných orientovaných cest uspořádaných homomorfismy grafů. Náš nový důkaz je jednodušší, než předchozí důkaz univerzality třídy orientovaných grafů nalezený J. Nešetřilem.

Práce se zabývá univerzalitou spočetných tříd, ale množství výsledků lze snadno zobecnit i na třídy větší. Otázkou zůstává, zda lze zobecnit samotný důkaz univerzality třídy orientovaných cest. Délka cest je vždy maximálně spočetná a proto důkaz nelze zobecnit přímo. Lze však očekávat, že vlastní konstrukci je možné zobecnit, čemuž se budeme věnovat v budoucím výzkumu. Je známo, že samotná existence vlastní třídy navzájem neporovnatelných grafů je nezávislá na Zermero-Frenklově teorii množin (známá jako Vopěnkův axiom) a proto nelze očekávat stejně silný výsledek jako v případě spočetných grafů. Je však otevřená otázka, zda Vopěnkův axiom postačuje pro důkaz univerzality třídy všech grafů.

Věříme také, že lokální popis univerzální a homogenní struktury $\mathcal{H}$ pomůže nalézt obdoby některých výsledků o Radoově grafu pro částečná uspořádání. Zejména pak doufáme v zobecnění výsledků o Ramseyovských vlastnostech tříd grafů prezentovaných v kapitole 2.

Literatura

[1] J. CAMERON: The Random Graph, The Mathematics of Paul Erdös (ed. R. L. Graham, J. Nešetřil), *Springer Verlag* (1998), 333–351.

[2] G. CHERLIN, S. SHELAH, SHI: Universal graphs with forbiden subgraps and algebraical closure, *Advances in Applied Mathematics, vol 22, issue* **4** (1999), 454–491.

[3] P. ERDÖS a A. RÉNYI: Asymmetric graphs, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **14** (1963), 295–315.

[4] R. FRAÏSSÉ: Theory of relations, *North-Holland, Amsterdam* (1953).

[5] A. M. H. GERARDS: Homomorphisms of graph into edd cycles, Journal of Graph Theory **12** (1988), 78-83.

[6] W. GUTJAHR, E. WELZL a G. WOEGINGER: Polynomial graph colorings. *Discrete Applied Math.* **35** (1992), 29–56.

[7] Z. HEDRLÍN: On universal partly oriented sets and clases, *J. Algebra* **11** (1969), 503–509.

[8] P. HELL a J. NEŠETŘIL: Images of rigid graphs. *Europ. J. Combin.,* **12** (1991), 33–42.

[9] P. HELL a X. ZHU: Homomorphisms to oriented paths. *Discrete Math.* **132** (1994), 107–114.

[10] D. E. KNUTH: Surreal numbers,*Addison Wesley* (1974). Čestký překlad H. NEŠETŘILOVÁ, *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, čísla* **2–5** (1975).

[11] A. H. LACHLAN, R. E. WOODROW: Countable ultrahomogeneous undirected graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.* **262** (1980), 51–94.

[12] J. Nešetřil: For graphs there are only four types of hereditary Ramsey classes, J. Combin. Theory Ser. B **46** (1986), 127–132.

[13] J. Nešetřil: On Universality of Set Systems. *KAM–DIMATIA series* **491** (2000).

[14] J. Nešetřil: The Coloring Poset and it's On–Line universality. *KAM–DIMATIA series* **458** (2000).

[15] J. Nešetřil: Combinatorics of Mappings. *KAM–DIMATIA series* **472** (2000).

[16] J. Nešetřil, V. Rödl: Partitions of relational and set systems, *J. Combin. Theory Ser. A* **22** (1977), 289–312.

[17] J. Nešetřil, V. Rödl: Ramsey classes of set systems, *J. Combin. Theory Ser. A* **34** (1983), 183–201.

[18] J. Nešetřil, X. Zhu: Path Homomorphisms. *Math. Proc. Comb. Phil. Soc.* (1993), 207–220.

[19] A. Pultr, V. Trnková: Combinatorial, algebraic and topological represenations of groups, semigroups and catogeries, Academia (1980), Prague.

[20] R. Rado, Universal graphs and universal functions, *Acta Arith.* **9** (1964), 393–407.

[21] F. P. Ramsey: On a problem of formal logic, *Proc. London Math. Soc. (3)* **30** (1930), 264–286.

[22] W. Gutjahr, E. Welzl a G. Woeginger: Polynomial graph colorings, *Discrete Ap. Math* **35** (1992).